EXAKT LÖSBARE STOCHASTISCHE MODELLE FÜR DEN TEILCHEN-TRANSPORT IN EINER TURBULENTEN STRÖMUNG

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Physik
und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von

WINFRIED MAASJOST

aus
VERL

Bochum 1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549226_0046

EXAKT LÖSBARE STOCHASTISCHE MODELLE FÜR DEN TEILCHEN-TRANSPORT IN EINER TURBULENTEN STRÖMUNG

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Physik
und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von

WINFRIED MAASJOST

aus
VERL

Bochum 1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am 25. Juni 1982

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 1982

Referent: Prof. Dr. K. Elsässer

Korreferent: Prof. Dr. K. Schindler

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

Einleitung 5

Kap. I: Mathematische Formulierung des Problems 10

a.) Teilchentransport in einem deterministischen Geschwindigkeitsfeld 10

b.) Teilchentransport in einer turbulenten Strömung 11

c.) Physikalische Formulierung des turbulenten Transportproblems 13

Kap. II: Transport in einer eindimensionalen Strömung .. 17

a.) Eine allgemeine Gleichung für den eindimensionalen mittleren Propagator 17

b.) Berechnung des mittleren Propagators für $t \rightarrow \infty$ 20

c.) Eine Näherungslösung für $g(x,x',t)$ 29

d.) Abschließende Bemerkungen zum eindimensionalen Problem 35

Kap. III: Transport in einer zweidimensionalen inkompressiblen Strömung 37

a.) Konstruktion einer zweidimensionalen Modellströmung 38

b.) Berechnung des mittleren Propagators für die Modellströmung sowie für beliebige zweidimensionale Strömungen 46

Seite

c.) Abschließende Bemerkungen zum zweidimensionalen Problem 51

Kap. IV: Vergleich der Theorie mit numerischen Experimenten 53

a.) Konstruktion eines numerisch realisierbaren Gaußschen Geschwindigkeitsfeldes und Berechnung des zugehörigen mittleren Propagators ... 55

b.) Vergleich von Theorie und numerischem Experiment 61

Zusammenfassung 65

Literaturverzeichnis 68

Anhänge 71

Figuren 82

EINLEITUNG

Die Beschreibung des Transports masseloser Teilchen durch ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld gehört zu den klassischen Problemen der Fluiddynamik. Man nimmt dabei die statistischen Eigenschaften der Strömung als gegeben an und geht davon aus, daß sie durch die trägheitslos transportierte Substanz nicht beeinflußt werden. Ziel der Untersuchung ist es, den statistischen Mittelwert der Teilchendichte als Funktion von Ort und Zeit zu berechnen.

Die klassische Behandlung des Problems (Taylor 1921) geht von einer Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes in Lagrangeschen Koordinaten aus. Dabei denkt man sich die Flüssigkeit zusammengesetzt aus infinitesimal kleinen Elementen, deren Trajektorien als Funktion ihrer Anfangsorte und der Zeit gegeben sind. In einer turbuleneten Strömung sind die statistischen Eigenschaften der Bahnen einzelner Fluidelemente jedoch leider weder meßbar noch analytisch berechenbar; die von Taylor gefundene Lösung ist also für die Untersucheng von realen Transportvorgängen nur dann brauchbar, wenn sie durch zusätzliche Annahmen ergänzt wird. Batchelor (1949) postulierte deshalb in Anlehnung an experimentelle Ergebnisse eine Gaußfunktion mit zeitabhängiger Breite für die Dichte der transportierten Teilchen. Mit dieser Erweiterung ist Taylors Theorie seitdem vor allem bei der Untersuchung von Transportvorgängen in der Atmosphäre angewendet worden und hat zu brauchbaren Ergebnissen geführt (Pasquill 1962, Panchev 1971). Dabei mußte allerdings die zeitabhängige Varianz der Gaußfunktion durch heuristische Überlegungen bestimmt werden; sie hängt

nämlich auch in Batchelors Modell immer noch von den Lagrangeschen statistischen Eigenschaften des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes ab. Damit ist klar, daß das grundsätzliche Problem, die Transporteigenschaften einer turbulenten Strömung durch ihre vorgegebenen statistischen Eigenschaften auszudrücken, von Taylor und Batchelor nicht gelöst werden konnte.

Eine realistische Behandlung des turbulenten Transports muß vielmehr von der Eulerschen Darstellung des Strömungsfeldes ausgehen, in der die Geschwindigkeit in einem raumfesten Koordinatensystem als Funktion der Zeit angegeben wird. Dieser Ansatz hat jedoch bisher zu keinerlei brauchbaren Ergebnissen geführt. Roberts (1961) versuchte, die "Direct Interaction Approximation" (Kraichnan 1959) auf das Problem anzuwenden; abgesehen vom zweifelhaften Wert dieser Theorie (Maasjost und Elsässer 1982) ist seine Lösung jedoch auf konstante Geschwindigkeitsfelder beschränkt. Kraichnans nichtlineare partielle Integro-Differentialgleichung war für kompliziertere Fälle nicht mehr auswertbar, und ebenso wie Batchelor und Taylor konnte Roberts wieder nur heuristische Argumente zur Bestimmung der Teilchendichte für sehr große und sehr kleine Zeiten anbieten. Vereinfacht man Kraichnans Theorie durch zusätzliche Annahmen, so erhält man eine lineare Gleichung, die schon vorher von Bourret (1960) zur Beschreibung der turbulenten Diffusion vorgeschlagen wurde. Es ist jedoch wiederum fraglich, ob seine Theorie sehr viel mit der Realität zu tun hat; da die Bourretsche Gleichung trotz ihrer linearen Form nicht einfach zu lösen ist, blieb diese Frage bis heute unbeantwortet.

Um die Lücke zwischen den Resultaten von Taylor und der in

Wirklichkeit vorliegenden Situation zu schließen, wollte Lumley (1962) die Lagrangeschen Korrelationsfunktionen eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes durch die Eulerschen ausdrücken. Das gelang ihm jedoch nur im Rahmen einer formalen, nicht praktisch auswertbaren Theorie. Da sich die Untersuchung turbulenter Transportvorgänge bisher fast ausschließlich an Taylors Ideen orientiert hat, wäre es sehr nützlich, wenn dieser Ansatz erfolgreich zu Ende geführt werden könnte; das ist aber leider bisher nicht gelungen.

Da eine theoretische Beschreibung des Teilchentransports in einem Eulerschen Geschwindigkeitsfeld auf große Schwierigkeiten stieß, führten Patterson und Corrsin (1966) eine numerische Simulation durch, um wenigstens empirisches Material über den Zusammenhang zwischen Eulerschen und Lagrangeschen Korrelationsfunktionen zur Verfügung zu stellen. Sie konnten dadurch jedoch nicht zu überzeugenden Schlußfolgerungen gelangen. Kraichnan (1970) wählte den selben Weg, um die Vorhersagen seiner Theorie (Kraichnan 1959) zu überprüfen. Das gelang ihm jedoch nur, indem er die von ihm hergeleitete Gleichung für die mittlere Teilchendichte ebenfalls numerisch löste. Die Simulation des turbulenten Transportvorgangs selbst erforderte aber nicht mehr Aufwand und erscheint wesentlich flexibler als die Auswertung seiner nichtlinearen Diffusionsgleichung; man muß sich deshalb fragen, inwieweit diese tatsächlich einen Fortschritt in der Behandlung des Problems darstellt.

Kürzlich wurde das turbulente Diffusionsproblem auch im Hinblick auf seine mathematischen Aspekte untersucht (Kesten und Papanicolaou 1979). Es gelang zu zeigen, daß die Dichte der trans-

portierten Teilchen eine Fokker-Planck-Gleichung erfüllt, wenn der Mittelwert des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes verschieden von Null ist und seine Schwankungen hinreichend klein sind. Trotz dieser vereinfachenden Annahmen konnte jedoch kein expliziter Ausdruck für die mittlere Teilchendichte angegeben werden.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß die Beschreibung der turbulenten Diffusion passiver Teilchen in einem Eulerschen Geschwindigkeitsfeld ein praktisch ungelöstes Problem darstellt. Seit es zum ersten Mal mathematisch formuliert wurde (Kampé de Fériet 1937), hat es keine brauchbaren theoretischen Fortschritte gegeben

In dieser Arbeit untersuchen wir den Transport in einer turbulenten Strömung mit Hilfe von exakt lösbaren stochastischen Modellen. Wir geben das Eulersche Geschwindigkeitsfeld sowie seine statistischen Eigenschaften so vor, daß der Erwartungswert für die Dichte der transportierten Substanz exakt als Funktion von Ort und Zeit berechnet werden kann. Gleichzeitig fordern wir, daß die Modelle realistisch sind, daß also durch geeignete Wahl ihrer Parameter die statistischen Eigenschaften von Strömungen, die man in der Natur oder im Labor vorfindet, gut approximiert werden.

Es ist ein ungelöstes Problem, welche der statistischen Eigenschaften einer turbulenten Strömung für ihr Transportverhalten bestimmend und welche dafür ohne Bedeutung sind. Um Kriterien für die Konstruktion unserer stochastischen Modelle zu haben, formulieren wir deshalb zunächst eine grundlegende Hypothese, welche diese Frage beantwortet. Durch Vergleich unserer analy-

tischen Ergebnisse mit numerischen Experimenten untersuchen wir dann, ob unsere Annahme mit der Realität übereinstimmt und unsere Modelle zur Beschreibung der turbulenten Diffusion geeignet sind.

Turbulente Geschwindigkeitsfelder, die explizit von der Zeit abhängen, werden im folgenden nicht betrachtet. Außerdem sind die eindimensionalen Rechnungen auf homogene und die mehrdimensionalen auf inkompressible, homogene und isotrope Strömungen beschränkt.

KAP. I MATHEMATISCHE FORMULIERUNG DES PROBLEMS

a.) Teilchentransport in einem deterministischen Geschwindigkeitsfeld

Eine Substanz aus trägheitslosen ("passiven") Teilchen mit der Dichte $\rho(\vec{x},t)$ wird in einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x},t)$ gemäß der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\rho = 0 \; ; \qquad \rho(\vec{x},t=0) = \rho_0(\vec{x})$$

transportiert. Die Lösung von (1) ist

$$(2) \qquad \rho(\vec{x},t) = \int d^3x' \, G(\vec{x},\vec{x}',t)\, \rho_0(\vec{x}') \; .$$

$G(\vec{x},\vec{x}',t)$ heißt Greensche Funktion oder Propagator für das Problem und ist gegeben durch

$$G(\vec{x},\vec{x}',t) = \delta\left(\vec{X}(t,\vec{x}') - \vec{x}\right) \; ,$$

wobei die "Charakteristik" $\vec{X}(t,\vec{x}')$ die Lösung der Gleichung ("Charakteristikengleichung")

$$(3) \qquad \dot{\vec{X}}(t,\vec{x}') = \vec{v}\left(\vec{X}(t,\vec{x}'),t\right) \; ; \qquad \vec{X}(0,\vec{x}') = \vec{x}'$$

ist. (3) beschreibt die trägheitslose Bewegung eines einzelnen Teilchens im Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x},t)$. Man zeigt leicht, daß der Propagator G auch die Gleichung

$$\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}',t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla} G(\vec{x},\vec{x}',t) = 0 \quad ;$$

(4)

$$G(\vec{x},\vec{x}',t=0) = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

erfüllt.

Kennt man $\vec{X}(t,\vec{x}')$ für alle t und $\vec{x}'$, so ist damit auch $G(\vec{x},\vec{x}',t)$ bekannt, und man hat das Transportproblem für das vorgegebene $\vec{v}(\vec{x},t)$ gelöst.

b.) Teilchentransport in einer turbulenten Strömung

Wir nehmen nun an, $\vec{v}(\vec{x},t)$ aus Gleichung (1) sei ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld; das heißt, nur seine statistischen Eigenschaften sind bekannt. Diese werden festgelegt durch die gemeinsamen Verteilungsfunktionen von

$$\vec{v}(\vec{x},t)$$
$$\vec{v}(\vec{x},t) \; ; \; \vec{v}(\vec{x}',t')$$
$$\vec{v}(\vec{x},t) \; ; \; \vec{v}(\vec{x}',t') \; ; \; \vec{v}(\vec{x}'',t'')$$
$$\vdots$$

für beliebige $\vec{x},\vec{x}',\vec{x}''$ ... und t,t',t'' ... ; eine äquivalente Beschreibung können wir auch durch Angabe sämtlicher Momente

$$\langle \vec{v}(\vec{x},t) \rangle$$
$$\langle \vec{v}(\vec{x},t)\, \vec{v}(\vec{x}',t') \rangle$$
$$\langle v(\vec{x},t)\, \vec{v}(\vec{x}',t')\, \vec{v}(\vec{x}'',t'') \rangle$$
$$\vdots$$

erhalten. Mit dieser Maßgabe wird (1) eine Gleichung für die statistischen Eigenschaften von $\rho(\vec{x},t)$, also eine stochastische Differentialgleichung; um sie vollständig zu lösen, müssen wir nun nicht mehr ρ selbst bestimmen, sondern seine sämtlichen Momente bzw. Verteilungsfunktionen. Wegen der riesigen Informationsmenge, die in der vollständigen statistischen Beschreibung eines Zufallsfeldes enthalten ist, ist das natürlich ein hoffnungslos kompliziertes Problem. Glücklicherweise aber wird die Lösung in dieser Allgemeinheit gar nicht benötigt: Die physikalisch relevante Größe zur Beschreibung des Transportvorgangs ist der Mittelwert $\langle \rho(\vec{x},t) \rangle$, und deshalb können wir unser Problem als gelöst betrachten, wenn wir diesen berechnet haben.

Um eine Gleichung für $\langle \rho(\vec{x},t) \rangle$ herzuleiten, bilden wir auf beiden Seiten von (2) den Erwartungswert und erhalten

$$\langle \rho(\vec{x},t) \rangle = \int d^3x' \; g(\vec{x},\vec{x}',t)\, \rho_0(\vec{x}') \quad ; \tag{5}$$

$$g(\vec{x},\vec{x}',t) := \langle G(\vec{x},\vec{x}',t) \rangle \quad .$$

Dabei haben wir $\rho_0(\vec{x}')$ als exakt vorgegeben (nicht statistisch) angenommen. Offensichtlich gilt die Beziehung

$$g(\vec{x},\vec{x}',t) = \delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad . \tag{6}$$

$g(\vec{x},\vec{x}',t)\,d^3x$ interpretieren wir als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen, welches bei $t=0$ an der Stelle $\vec{x}'$ startet und durch $\vec{v}(\vec{x},t)$ gemäß (3) trägheitslos transportiert

wird, zur Zeit t in einem Volumenelement d^3x um den Punkt $\vec{x}$ angetroffen wird. Ist $g(\vec{x},\vec{x}',t)$ bekannt, so reduziert sich damit die Berechnung der gesuchten Größe $\langle \rho(\vec{x},t) \rangle$ auf eine Quadratur.

Wir können also das Problem, welches wir zur Beschreibung des Teilchentransports in einer turbulenten Strömung zu lösen haben, folgendermaßen formulieren:

> Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmter Verlauf des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(\vec{x},t)$ realisiert wird. Für jede Realisierung von $\vec{v}(\vec{x},t)$ ist die Bahn eines trägheitslos transportierten Teilchens gegeben durch Gleichung (3). Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $g(\vec{x},\vec{x}',t)d^3x$ dafür, daß ein Teilchen mit Anfangsort $\vec{x}'$ bei $t=0$ sich zur Zeit t an der Stelle $\vec{x}$ befindet.

Aus (5) erhalten wir dann den Mittelwert $\langle \rho(\vec{x},t) \rangle$, den wir zur Beschreibung des Transportvorgangs benötigen.

c.) Physikalische Formulierung des turbulenten Transportproblems

Im vorangehenden Abschnitt haben wir angenommen, daß das turbulente Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x},t)$ im statistischen Sinne vollständig bekannt ist, das heißt, daß seine sämtlichen Momente bzw. Verteilungsfunktionen vorgegeben sind. Diese idealisierte

Beschreibung ist natürlich bei einer realen Strömung nicht gegeben, weil das Geschwindigkeitsfeld weder mit beliebiger Genauigkeit gemessen noch berechnet werden kann. Eine physikalisch sinnvolle Formulierung unseres Problems muß deshalb lauten: Vorgegeben sind die Momente niedriger Ordnung eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(\vec{x},t)$. Wie bestimmt man daraus die mittlere Dichte $\langle \rho(\vec{x},t) \rangle$ einer trägheitslos transportierten Substanz bzw. den mittleren Propagator für ein trägheitslos transportiertes Teilchen?
Experiment und Theorie beschränken sich im allgemeinen auf Ein- und Zweipunkt-Momente der Ordnungen eins bis vier, also auf die Größen

$$\langle v_i^n(\vec{x},t)\, v_j^m(\vec{x},t) \rangle \; : \; n+m \leq 4 \; : \; i,j=1,2,3 \; .$$

Von besonderer Bedeutung ist dabei der Tensor der Geschwindigkeitskorrelation $\overleftrightarrow{R}$, der durch

$$\overleftrightarrow{R}(\vec{x},\vec{x}',t,t') := \langle \vec{v}(\vec{x},t)\, \vec{v}(\vec{x}',t') \rangle$$

definiert ist. Sämtliche Ansätze zur Beschreibung der turbulenten Diffusion gehen explizit oder implizit davon aus, daß der Diffusionsprozeß im wesentlichen nur von $\overleftrightarrow{R}$ abhängt, also höhere Momente vernachlässigt werden können. Diese Hypothese werden wir auch der Konstruktion unserer stochastischen Modelle zugrunde legen. Wir gehen davon aus, daß

(i) zur Beschreibung der Diffusion in einer tur-

bulenten Strömung die Ein- und Zweipunkt-Momente des Geschwindigkeitsfeldes ausreichend sind,

(ii) der Diffusionsprozeß in guter Näherung nur von $\vec{R}$ allein abhängt.

Die zweite Voraussetzung ist exakt erfüllt, wenn $\vec{v}(\vec{x},t)$ ein Gaußsches Geschwindigkeitsfeld ist, denn dessen statistische Eigenschaften sind ja durch Angabe der Zweierkorrelation $\vec{R}$ vollständig bestimmt. Für alle anderen Fälle müssen beide Aussagen als zwar plausibel, jedoch unbewiesen gelten.
Es erscheint fraglich, ob man überhaupt jemals zu einer brauchbaren Theorie der turbulenten Diffusion gelangen wird, wenn die erste der beiden Hypothesen keine vernünftige Annahme darstellt. Dann wären nämlich Tensoren dritter und höherer Stufe zur Beschreibung des Diffusionsvorgangs nötig, die das theoretische Modell wahrscheinlich außerordentlich kompliziert und nur sehr schwer auswertbar machen würden. Die fundamentale Annahme der statistischen Turbulenztheorie, daß die physikalisch relevanten Größen durch die niedrigen Momente der fluktuierenden Größen ausgedrückt werden können, ist auch für die Behandlung des turbulenten Diffusionsproblems unabdingbar.

Im folgenden werden wir stochastische Modellströmungen konstruieren, deren Ein- und Zweipunkt-Momente beliebig vorgegeben werden können und die gleichzeitig die exakte Berechnung des mittleren Propagators $g(\vec{x},\vec{x}',t)$ gestatten. Wenn wir die Gültigkeit unserer ersten Hypothese voraussetzen, ist damit das

Problem der Diffusion in einer turbulenten Strömung gelöst. Die Konstruktion gelingt leider nur für ein eindimensionales, zeitunabhängiges Geschwindigkeitsfeld. Für den zwei- bzw. dreidimensionalen Fall geben wir ein stochastisches Modell an, welches die beliebige Vorgabe der Einpunkt-Verteilung und des Korrelationstensors $\overleftrightarrow{R}$ gestattet (bei gleichzeitiger exakter Berechnung von $g(\vec{x},\vec{x}',t)$).

KAP. II TRANSPORT IN EINER EINDIMENSIONALEN STRÖMUNG

In diesem Kapitel lösen wir die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v(x)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

für den Fall, daß $v(x)$ der homogene Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß ist. Dieser ist ein Gauß-Markov-Prozeß und erfüllt die Beziehungen

$$\langle v(y) \rangle = 0 \; ;$$

$$\langle v(y)\, v(y') \rangle = \sigma^2 e^{-\gamma|y-y'|} \; ; \quad y, y' \in \mathbb{R} . \tag{8}$$

weitere Eigenschaften sind in Anhang A zusammengestellt. Wir beschränken uns bei der Lösung von (7) auf die Berechnung der physikalisch relevanten Größe $\langle \rho(x,t) \rangle$; wegen Gleichung (5) genügt es dann, den mittleren Propagator $g(x,x',t)$ anzugeben.

Im folgenden werden wir $g(x,x',t)$ für $t \to \infty$ exakt berechnen. Für endliche Zeiten geben wir eine Näherungslösung an, die für $t \to 0$ und $t \to \infty$ jeweils in die exakte Lösung übergeht.

a.) Eine allgemeine Gleichung für den eindimensionalen mittleren Propagator

Um den mittleren Propagator $g(x,x',t)$ später bequem berech-

nen zu können, beweisen wir zunächst die folgende Aussage:

Satz 1. Ein Teilchen mit der Ortskoordinate $X(t)$ werde durch das turbulente Geschwindigkeitsfeld $v(x)$ gemäß der Gleichung

$$\dot{X}(t) = v(X(t)) \quad ; \quad X(0) = x' \tag{9}$$

transportiert. $P(x,x',t_0)$ sei die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{X(\tau) \geq x$ für ein $\tau \leq t_0\}$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen den Ort x zu einem Zeitpunkt $\tau \leq t_0$ erreicht. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$g(x,x',t_0) = \begin{cases} \dfrac{\partial P(x,x',t_0)}{\partial x}, & x < x' \\ -\dfrac{\partial P(x,x',t_0)}{\partial x}, & x > x' \end{cases} . \tag{10}$$

Beweis: Die Lösung $X(t)$ von (9) ist für alle Zeiten monoton wachsend, wenn $v(x') \geq 0$, bzw. monoton fallend, wenn $v(x') \leq 0$ gilt. Damit ein Teilchen den Ort $x > x'$ zu einem Zeitpunkt $\tau \leq t_0$ erreicht, muß $X(t)$ monoton wachsend sein, woraus

$$\overline{X}(t_0) \geq x$$

folgt. Andererseits haben wir natürlich

$$\overline{X}(t_0) \geq x \Rightarrow X(\tau) = x \text{ für ein } \tau \leq t_0 .$$

Also erreichen genau die Teilchen den Punkt $x > x'$ zu einem Zeitpunkt $\tau \leq t_0$, die zur Zeit t_0 eine Position $X(t_0) \geq x$ haben, und es gilt

$P(x, x', t_0)$ = Wahrscheinlichkeit, daß $\overline{X}(t_0) \geq x$ ist.

Ist $x < x'$, so erhält man analog

$P(x, x', t_0)$ = W. daß $\overline{X}(t_0) \leq x$ ist.

Aufgrund der Definition von $g(x, x', t)$ folgt daraus

$$P(x, x', t_0) = \int_{-\infty}^{x} g(\xi, x', t_0)\, d\xi \quad , \quad x < x' \; ;$$

$$1 - P(x, x', t_0) = \int_{-\infty}^{x} g(\xi, x', t_0)\, d\xi \quad , \quad x > x' \; .$$

Differenziert man diese beiden Gleichungen nach x, so folgt die Behauptung.-

Daß die durch (9) beschriebene Teilchenbahn $\overline{X}(t)$ monoton sein muß, kann man sich folgendermaßen klar machen: Ein Teilchen, welches an eine Stelle x_0 gelangt, an der $v(x_0) = 0$ gilt, wird dort endgültig zur Ruhe kommen; das Anfangswertproblem

$$\dot{\overline{X}}(t) = v(\overline{X}(t)) \quad ; \quad \overline{X}(0) = x_0$$

hat nämlich für den Fall $v(x_0) = 0$ nur $\overline{X}(t) \equiv 0$ als physikalisch sinnvolle Lösung. Also wird die Teilchengeschwindigkeit nie negativ oder nie positiv, und das heißt, $\overline{X}(t)$ ist monoton.

b.) Berechnung des mittleren Propagators für $t \to \infty$

Wir leiten nun eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit her; es lautet:

Satz 2. Sei $v(y)$ der homogene Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß mit dem Mittelwert

(8a) $$\langle v(y) \rangle = 0$$

und der Zweierkorrelation

(8b) $$\langle v(y)\, v(y') \rangle = \sigma^2 e^{-\gamma|y-y'|} .$$

und sei $g(x,x',t)$ der mittlere Propagator für die Gleichung

(7) $$\frac{\partial p}{\partial t} + v(x)\frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

Dann ist $g(x,x',\infty) := \lim_{t\to\infty} g(x,x',t)$ gegeben durch

(11) $$g(x,x',\infty) = g(|x-x'|,\infty) = \frac{\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma|x-x'|}-1}} .$$

Der Beweis ist Gegenstand dieses Abschnitts und ergibt sich aus Satz 1 und den folgenden Sätzen 3-6.-

Um $g(x,x',\infty)$ zu erhalten, genügt es wegen Satz 1, $P(x,x',\infty)$ zu berechnen, also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein

Teilchen mit der Bewegungsgleichung (9) irgendwann den Punkt X erreicht. Das ist für $x>x'$ ($x<x'$) genau dann der Fall, wenn $\lim_{t\to\infty} \bar{X}(t) \geq x$ ($\leq x$) ist; denn $\bar{X}(t)$ ist eine monotone Funktion, wie wir uns im vorangehenden Abschnitt überzeugt haben. Dort wurde auch hergeleitet, daß $\lim_{t\to\infty} \bar{X}(t) = x_0$ gilt, wenn x_0 der Punkt ist, an dem $f(y) = v(x)v(y)$ zum ersten Mal Null wird. Es gilt daher

Satz 3. Sei $P(x,x',t)$ definiert wie in Satz 1. Dann gilt für $x<x'$

$$P(x,x',\infty) = \text{Wahrscheinlichkeit, daß } v(y) \text{ im Intervall } (x,x'] \text{ kleiner als Null ist}$$

und für $x>x'$

$$P(x,x',\infty) = \text{W. daß } v(y) \text{ im Intervall } [x',x) \text{ größer als Null ist.-}$$

Eine anschauliche Formulierung dieses Satzes lautet: Ein Teilchen mit der Bewegungsgleichung (9) gelangt genau dann irgendwann an die Stelle $x>x'$ ($x<x'$), wenn $v(y)>0$ ($v(y)<0$) gilt für alle $y \in [x',x)$.

Die Fragestellung, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein stochastischer Prozeß stets innerhalb vorgegebener Schranken verläuft, ist in der Wahrscheinlichkeitstheorie eingehend untersucht worden (Siegert 1951, Darling und Siegert 1953, siehe auch Kannan 1979). Es erscheint aber doch sinnvoll, dieses Pro-

blem noch einmal auf eine anschauliche Art zu behandeln und dabei nur elementare, unmittelbar einleuchtende Ergebnisse aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verwenden.
Wir beweisen zunächst

Satz 4. Sei $w(y|w_0)$ ein inhomogener Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß (siehe Anhang A) mit dem scharfen Anfangswert $w(0|w_0) = w_0 > 0$. Dann ist für $x > 0$ die Wahrscheinlichkeit, daß $w(y|w_0)$ im Intervall $[0,x)$ größer als Null ist, gegeben durch

$$W\{w(y|w_0) > 0 \text{ für alle } y \in [0,x)\} = 1 - 2\,W\{w(x|w_0) \le 0\}\,.$$

Beweis: Im folgenden schreiben wir zur Vereinfachung stets $w(x)$ anstelle von $w(x|w_0)$.
Sei $y \in [0,x)$. Es gilt wegen (A.vi)

$$w(x) = e^{-\gamma(x-y)}\,w(y) + \zeta_{yx}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\gamma(x-y)}w(x) - w(y) = e^{\gamma(x-y)}\zeta_{yx}\,.$$

ζ_{yx} ist darin eine Null-zentrierte gaußverteilte Zufallsvariable und ist unabhängig von w (vgl. Anhang A). Also ist auch $e^{\gamma(x-y)}w(x) - w(y)$ eine Null-zentrierte gaußverteilte Zufallsvariable, die unabhängig von $w(y)$ ist. Damit folgt

$$W\{e^{\gamma(x-y)}w(x) - w(y) \le 0\} = W\{e^{\gamma(x-y)}w(x) - w(y) \ge 0\}$$

und auch

$$W\{e^{\gamma(x-y)}w(x)-w(y)\leq 0 \mid w(y)=0\}$$
$$= W\{e^{\gamma(x-y)}w(x)-w(y)\geq 0 \mid w(y)=0\}\ .$$

Hier ist $W\{A|B\}:=$ Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Voraussetzung, daß B eingetreten ist. Die zweite Beziehung folgt, weil $e^{\gamma(x-y)}w(x)-w(y)$ gar nicht von $w(y)$ abhängt, also

$$W\{e^{\gamma(x-y)}w(x)-w(y)\gtrless 0\}$$
$$= W\{e^{\gamma(x-y)}w(x)-w(y)\gtrless 0 \mid w(y)=0\}$$

erfüllt sein muß. Unter der Voraussetzung $w(y)=0$ gilt aber nun

$$e^{\gamma(x-y)}w(x)-w(y) = e^{\gamma(x-y)}w(x)\ ,$$

und damit haben wir weiter

$$W\{e^{\gamma(x-y)}w(x)\leq 0 \mid w(y)=0\}$$
$$= W\{e^{\gamma(x-y)}w(x)\geq 0 \mid w(y)=0\}$$

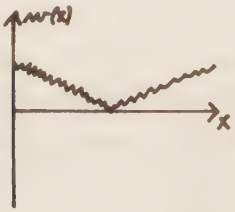
oder, was äquivalent dazu ist,

$$W\{w(x)\leq 0 \mid w(y)=0\} = W\{w(x)\geq 0 \mid w(y)=0\}\ .$$

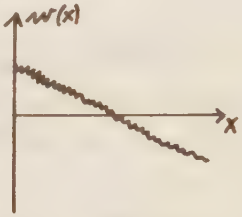
Da $y\in[0,x)$ beliebig war, folgt

$$W\{w(x)\leq 0 \mid \text{Es gibt ein } y\in[0,x) \text{ mit } w(y)=0\}$$
$$= W\{w(x)\geq 0 \mid \text{Es gibt ein } y\in[0,x) \text{ mit } w(y)=0\}\ .$$

Dieses Ergebnis bedeutet anschaulich, daß der Prozeß $w(y)$ symmetrisch um die x-Achse weiterläuft, wenn er sie einmal geschnitten hat. Die Realisierungen



und



sind gleich wahrscheinlich. Wenn wir in der vierten Formel von (A.vi) $w(y')=0$ setzen, folgt diese Aussage unmittelbar. Wir kürzen das Ereignis $\{$ Es gibt ein $y \in [0,x)$ mit $w(y)=0\}$ durch $m(x)$ ab und schreiben

$$W\{w(x)\le 0 \mid m(x)\} = W\{w(x)\ge 0 \mid m(x)\} .$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit $W\{m(x)\}$ und benutzen die Beziehung $W\{A \text{ und } B\} = W\{A|B\}\,W\{B\}$. Das ergibt

$$W\{w(x)\le 0 \text{ und } m(x)\} = W\{w(x)\ge 0 \text{ und } m(x)\} .$$

Wir erinnern uns an dieser Stelle, daß $w(0)=w_0>0$ gilt, und somit

(i) $\quad w(x)\le 0 \Longrightarrow$ Es gibt ein $y\in[0,x)$ mit $w(y)=0$;

in Worten: Die Realisierungen von w mit $w(x)\le 0$ sind eine Teilmenge der Realisierungen, die die x-Achse schneiden. Es

folgt

$$W\{w(x)\le 0 \text{ und } m(x)\} = W\{w(x)\le 0\}$$

(ii)
$$= W\{w(x)\ge 0 \text{ und } m(x)\} .$$

Mit dieser Beziehung können wir ganz leicht $W\{m(x)\}$ berechnen. Es gilt allgemein für beliebige Ereignisse A und B :
$W\{A\} = W\{A \text{ und } B\} + W\{A \text{ und } \overline{B}\}$, $\overline{B}$ = Komplement von B bezüglich der Menge der möglichen Ergebnisse unseres Experiments. Also haben wir

$$W\{m(x)\} = W\{m(x) \text{ und } w(x)\le 0\} + W\{m(x) \text{ und } w(x)\ge 0\}$$
$$= W\{w(x)\le 0\} + W\{m(x) \text{ und } w(x)\ge 0\}$$

wegen (i), und weiter

$$W\{m(x)\} = 2\, W\{w(x)\le 0\}$$

wegen (ii).
Mit $m(x)$ hatten wir das Ereignis bezeichnet, daß der Prozeß w im Intervall $[0,x)$ die x-Achse schneidet. Dann gilt

$$W\{w(y)>0 \text{ für alle } y\in[0,x)\} = W\{\overline{m(x)}\}$$
$$= 1 - 2\, W\{w(x)\le 0\} .$$

Damit ist Satz 4 bewiesen.-

Wenn wir den Anfangswert $w(0|w_0)$ von $w(y|w_0)$ nicht fest vorgeben, sondern als Gaußsche Zufallsvariable annehmen, so

erhalten wir einen neuen stochastischen Prozeß $v(y)$. Dieser ist bei geeigneter Wahl der Verteilungsfunktion $f(w_0)$ von $w(0|w_0)$ identisch mit dem homogenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß aus Satz 2 (vgl. Anhang A). $f(w_0)dw_0$ gibt dann die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß für den neuen Prozeß $v(0)=w_0$ gilt; wegen Satz 4 haben wir daher für $w_0 \gtrless 0$

$$[1-2W\{w(x|w_0)\leq 0\}]f(w_0)dw_0 = \text{Wahrscheinlichkeit,}$$

daß $v(0)=w_0$ gilt und $v(y)$ im Intervall $[0,x)$ größer als Null ist.

Wir erhalten also

Satz 5. $w(y|w_0)$ sei ein inhomogener Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß mit dem scharfen Anfangswert $w(0|w_0)=w_0 \gtrless 0$ sowie dem Mittelwert

$$(12a) \qquad \langle w(y|w_0)\rangle = w_0 e^{-\beta y}$$

und der Varianz

$$(12b) \qquad \langle w(y|w_0)^2\rangle = w_0^2 e^{-2\beta y} + \delta^2(1-e^{-2\beta y}) .$$

$v(y)$ sei der homogene Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß aus Satz 2 mit der (von y unabhängigen) Einpunkt-Verteilungsfunktion $f_v(v_0)$. Für die Wahrscheinlichkeit, daß $v(y)$ im Intervall $[0,x>0)$ größer als Null ist, gilt dann

$$W\{v(y)>0 \text{ für alle } y\in[0,x)\}$$

$$= \int_0^\infty dw_0\, f_v(w_0)\,[1-2W\{w(x|w_0)\le 0\}] \quad . \tag{13}$$

Wir verifizieren nun die in Satz 2 angegebene Formel (11), indem wir Gleichung (13) für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß explizit auswerten. Zunächst benötigen wir dafür die Einpunkt-Verteilungsfunktion $f_{w(y|w_0)}(w_y)$ des Prozesses $w(y|w_0)$. Für jedes y ist $w(y|w_0)$ eine Gaußsche Zufallsvariable und wird daher durch die Angabe von $\langle w(y|w_0)\rangle$ und $\langle w(y|w_0)^2\rangle$ vollständig beschrieben. Man rechnet leicht nach, daß die Gleichungen (12) erfüllt sind, wenn wir

$$f_{w(y|w_0)}(w_y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2(1-e^{-2\gamma y})}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(w_y - w_0 e^{-\gamma y})^2}{2\sigma^2(1-e^{-2\gamma y})}\right\} \tag{14}$$

wählen. Da $w(y|w_0)$ ein inhomogener Prozeß ist, hängt diese Funktion explizit von y ab. Es gilt offensichtlich

$$1-2W\{w(x|w_0)\le 0\} = 1-2\int_{-\infty}^{0} dw_y\, f_{w(x|w_0)}(w_y) \quad . \tag{15}$$

Die Einpunkt-Verteilung von $v(y)$ ist wegen (8) gegeben durch

$$f_v(w_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{w_0^2}{2\sigma^2}} \quad . \tag{16}$$

Das Integral in Gleichung (13) läßt sich mit Hilfe von (14), (15) und (16) explizit ausführen; das Ergebnis fassen wir zusammen in

Satz 6. Für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß aus Satz 2 gilt

$$(17)\quad W\{v(\gamma)>0 \text{ für alle } \gamma\in[0,x)\} = \frac{1}{2} - \arctan\sqrt{e^{2\gamma x}-1}\,.$$

Zum Beweis ist die durch Gleichungen (13)-(16) gestellte Integrationsaufgabe zu lösen; dazu verweisen wir auf Anhang B.-

Mit Gleichung (17) haben wir wegen Satz 1 und Satz 3 einen expliziten Ausdruck für $P(x>0,0,\infty)$ und $g(x>0,0,\infty)$ gefunden. Für beliebige x, x' können wir nun $g(x,x',\infty)$ durch ein Symmetrieargument erhalten: Da das Geschwindigkeitsfeld $v(x)$ aus Gleichung (7) homogene statistische Eigenschaften besitzt, kann $g(x,x',t)$ nur von $|x-x'|$ abhängen; also gilt

$$(18)\qquad g(x,x',\infty) = g(|x-x'|,0,\infty)\,.$$

Aus den Sätzen 1, 3 und 6 folgt für $x>0$

$$g(x,0,\infty) = \frac{\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}\,,$$

und mit (18) erhalten wir daraus

$$g(x,x',\infty) = \frac{\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma|x-x'|}-1}}\,.$$

Damit ist Satz 2 vollständig bwiesen.
Die Funktionen $g(x,x',\infty)$ und $P(x,x',\infty)$ sind für die spezielle Wahl $\gamma=1$ in den Figuren 1 und 2 dargestellt.

c.) Eine Näherungslösung für $g(x,x',t)$

Für den allgemeinen Fall $0<t<\infty$ ist eine exakte Berechnung von $g(x,x',t)$ nicht gelungen. Man kann jedoch eine Näherungslösung für den mittleren Propagator angeben, die sowohl für $t\to 0$ als auch für $t\to\infty$ in das exakte Ergebnis übergeht. Wir beschränken uns dabei im folgenden wieder auf die spezielle Wahl $x'=0,\ x>0$ und benutzen das Symmetrieargument aus dem vorhergehenden Abschnitt, um den Propagator für beliebige x, x' zu bestimmen.

Sei $v(y)$ der homogene Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß (8). Ein Teilchen mit der Bewegungsgleichung (9) und der Anfangskoordinate $x'=0$ erreicht den Ort $x>0$ zum Zeitpunkt

$$(19)\quad t(x)=\begin{cases}\int_0^x \frac{dy}{v(y)}, & \text{wenn } v(y)>0 \text{ für alle } y\in[0,x)\\ \infty, & \text{wenn } v(y)\leq 0 \text{ für irgendein } y\in[0,x);\end{cases}$$

das folgt aus den Überlegungen in Abschnitt a.). Zu berechnen ist also

$$(20)\quad P(x,0,t)=W\left\{\int_0^x \frac{dy}{v(y)}\leq t \text{ und } v(y)>0 \text{ für alle } y\in[0,x)\right\},$$

und mit Satz 1 erhalten wir daraus den exakten mittleren Propagator $g(x,0,t)$.

Leider ist über die Wahrscheinlichkeitsverteilung (20) des nichtlinearen Funtionals (19) praktisch nichts bekannt; deshalb müssen wir uns mit einer Näherungslösung $\tilde{P}(x,0,t)$ be-

gnügen. Wir definieren

$$\text{(21)}\quad \tilde{P}(x,0,t) := W\left\{ v(y) \geq \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t} e^{-\gamma y} \text{ für alle } y\in[0,x) \right\}$$

und

$$\text{(22)}\quad \tilde{g}(x,0,t) := -\frac{\partial \tilde{P}(x,0,t)}{\partial x} .$$

Man verifiziert leicht, daß gilt

$$v(y) \geq \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t} e^{-\gamma y} \text{ für alle } y\in[0,x) \Longrightarrow \int_0^x \frac{dy}{v(y)} \leq t .$$

und für $x>0$ haben wir natürlich auch

$$v(y) \geq \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t} e^{-\gamma y} \Longrightarrow v(y)>0 \text{ für alle } y\in[0,x) .$$

Es folgt also

$$\tilde{P}(x,0,t) \leq P(x,0,t) .$$

Offensichtlich kann "$\int_0^x \frac{dy}{v(y)} \leq t$ und $v(y)>0$ für alle $y\in[0,x)$" gelten, ohne daß $v(y)$ für alle y oberhalb der Schranke $\frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t} e^{-\gamma y}$ liegt; $\tilde{P}$ ist also echt kleiner als P. Wir können bei der Berechnung von $\tilde{P}(x,0,t)$ genauso vorgehen wie bei der Berechnung von $P(x,x',\infty)$ in Abschnitt b.). Wir beweisen zunächst den Satz 4 entsprechenden

Satz 7. $w(y|w_0)$ sei der inhomogene Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß mit dem Anfangswert $w(0|w_0)=w_0>\frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}$ und dem Mittelwert

$$<w(y|w_0)> = w_0 e^{-\gamma y}$$

sowie der Varianz

$$<w(y|w_0)^2> = w_0^2 e^{-2\gamma y} + \sigma^2\left(1-e^{-2\gamma y}\right).$$

Außerdem sei

$$\tilde{w}(y|w_0) := w(y|w_0) - \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t} e^{-\gamma y}.$$

Dann gilt

$$W\left\{w(y|w_0) \geq \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t} e^{-\gamma y} \text{ für alle } y\in[0,x)\right\}$$
$$= 1 - 2\,W\left\{\tilde{w}(x|w_0)\leq 0\right\}.$$

Beweis: Wir unterdrücken zur Vereinfachung die Abhängigkeit der Prozesse w und $\tilde{w}$ von w_0.
Aufgrund der Definition von $\tilde{w}$ gilt offensichtlich

$$W\left\{w(y) \geq \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t} e^{-\gamma y} \text{ für alle } y\in[0,x)\right\}$$
$$= W\left\{\tilde{w}(y)\geq 0 \text{ für alle } y\in[0,x)\right\}.$$

Außerdem erfüllt $\tilde{w}(y|$ wegen (A.vi) die Beziehung

$$\tilde{w}(x) \equiv w(x) - \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}\, e^{-\gamma x}$$

$$= w(y)\, e^{-\gamma(x-y)} - \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}\, e^{-\gamma y} e^{-\gamma(x-y)} + \zeta_{yx}$$

$$= \left(w(y) - \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}\, e^{-\gamma y}\right) e^{-\gamma(x-y)} + \zeta_{yx} \,.$$

also

(i) $$\tilde{w}(x) = \tilde{w}(y)\, e^{-\gamma(x-y)} + \zeta_{yx} \,.$$

und aus $w(0) > \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}$ folgt

(ii) $$\tilde{w}(0) > 0 \,.$$

Im Beweis zu Satz 4 wurden nur die Beziehungen (i) und (ii) verwendet; also gilt für $\tilde{w}$

$$W\{\tilde{w}(y) \geq 0 \text{ für alle } y \in [0,x]\} = 1 - 2W\{\tilde{w}(x) \leq 0\} \,.$$

Damit folgt die Behauptung.-

Mit der selben Argumentation, wie sie zu Satz 5 führte, erhalten wir nun

Satz 8. Seien $w(y|w_0)$ und $\tilde{w}(y|w_0)$ definiert wie in Satz 7, und sei $v(y)$ der homogene Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß (8) mit der Einpunkt-Verteilungsfunktion $f_v(v_0)$.
Dann gilt

(23) $$W\left\{v(y) \geq \frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}\, e^{-\gamma y} \text{ für alle } y \in [0,x)\right\}$$

$$= \int_{\frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}}^{\infty} dw_0\, f_v(w_0) \left[1 - 2W\{\tilde{w}(x|w_0) \leq 0\}\right] .-$$

Die explizite Auswertung dieser Formel führt zu

Satz 9. $\tilde{g}(x,0,t)$ sei der durch (21) und (22) definierte genäherte Propagator, und $v(y)$ sei der homogene Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß (8). Dann gilt für $x>0$

$$\tilde{g}(x,0,t)=\frac{\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}\,e^{-\frac{1}{2}A^2}+ \tag{24}$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\frac{e^{-\gamma x}}{t}\exp\left\{-\frac{1}{2}e^{-2\gamma x}A^2\right\}\Phi\left(-\sqrt{1-e^{-2\gamma x}}\,A\right)$$

mit

$$A:=\frac{e^{\gamma x}-1}{\sigma\gamma t}\quad;\qquad \Phi(y):=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{y}dz\,e^{-\frac{1}{2}z^2}\,.$$

Beweis: Die in (23) benötigte Verteilungsfunktion f_v erhalten wir aus (16). Weiter gilt aufgrund der Definition von $\tilde{w}$

$$W\{\tilde{w}(x|w_0)\le 0\}=W\left\{w(x|w_0)\le\frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}e^{-\gamma x}\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\gamma x}}{\gamma t}}dw_y\,f_{w(x|w_0)}(w_y)\,,$$

wobei $f_{w(x|w_0)}(w_y)$ durch Gleichung (14) gegeben ist. Setzt man diesen Ausdruck sowie Formel (16) in (23) ein, so erhält man (24). Die Details sind in Anhang C ausgeführt.-

Für beliebige x,x' ist es wegen der Symmetrieeigenschaften des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses sinnvoll, die Näherungslösung $\tilde{g}(x,x',t)$ durch

$$\tilde{g}(x,x',t):=\tilde{g}(|x-x'|,0,t) \tag{25}$$

zu definieren. Fig. 3 zeigt $\tilde{g}(x,x',t)$ für verschiedene Werte von t .

Wir untersuchen nun noch das asymptotische Verhalten von $\tilde{g}(x,x',t)$ für kleine und große Zeiten. Für $t \to \infty$ konvergiert sowohl H als auch der zweite Summand von (24) gegen Null, und wir erhalten

$$\tilde{g}(x,x',\infty) = \frac{\gamma}{\pi} \sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma|x-x'|}-1}} = g(x,x',\infty) \quad .$$

Unsere Näherung ist also in diesem Grenzfall exakt. Für $t \to 0$ findet man

$$\tilde{g}(x,x',t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{für alle } x \neq x' \quad . \tag{26}$$

Außerdem gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(x,x',t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(|x-x'|,0,t)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \tilde{g}(x,0,t)\,dx$$

$$= 2\left(\tilde{P}(0,0,t) - \tilde{P}(\infty,0,t)\right) = 2\,W\{v(0) \geq 0\} \tag{27}$$

$$= 1 \quad ;$$

das folgt am einfachsten, wenn man $\tilde{P}(0,0,t)$ aus (21) und $\tilde{P}(\infty,0,t)$ aus (23) berechnet und die Definitionsgleichungen (22) und (25) verwendet. (26) und (27) sind gleichbedeutend mit

$$\lim_{t\to 0} \tilde{g}(x,x',t) = \delta(x-x') \quad .$$

Damit ist bewiesen, daß die Näherungslösung $\tilde{g}(x,x',t)$ sowohl für $t \to 0$ als auch $t \to \infty$ in den exakten mittleren Propagator $g(x,x',t)$ übergeht.

d.) Abschließende Bemerkungen zum eindimensionalen Problem

Eine interessante Eigenschaft von $g(x,x',\infty)$ und $\tilde{g}(x,x',t)$ ist, daß beide Ausdrücke für $x = x'$ singulär werden. Man macht sich leicht klar, daß auch der exakte mittlere Propagator $g(x,x',t)$ dieses Verhalten zeigen wird: Wie wir in Abschnitt a.) gesehen haben, kann ein Teilchen mit der Anfangskoordinate x' nicht zu einem späteren Zeitpunkt an den Ort x' zurückkehren, wenn es ihn einmal verlassen hat. Es folgt, daß $g(x,x',t)$ im Laufe der Zeit entweder konstant bleibt oder kleiner wird. Wenn $g(x',x',\infty) = \infty$ gilt, muß also auch für endliche Zeiten $g(x',x',t) = \infty$ gelten.
Das singuläre Verhalten von $g(x,x',t)$ an der Stelle $x = x'$ für beliebige Zeiten steht im Widerspruch zu der populären Annahme, daß $g(x,x',t)$ für kleine Zeiten durch die Einpunkt-Verteilung des Geschwindigkeitsfeldes $v(x)$ ausgedrückt werden kann. Man könnte argumentieren, daß für hinreichend kleines t auch $|x-x'|$ noch klein ist und das transportierte Teilchen deshalb ein ungefähr konstantes Geschwindigkeitsfeld "gesehen" hat. Also sollte der Ort des Teilchens zur Zeit t durch $\bar{X}(t) = x' + v(x')\,t$ gegeben sein, so daß wir für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\bar{X}(t)$, also den mittleren Propagator, das Ergebnis

(28) $$f_{X(t)}(x) \equiv g(x,x';t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2 t^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{\sigma t}\right)^2}$$

erhalten; für $v(x')$ haben wir hier die Gaußsche Verteilungsfunktion

$$f_{v(x')}(v_0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\sigma^2}}$$

angenommen. Unsere Rechnungen zeigen nun, daß (28) in der Umgebung des Anfangsortes x' nicht richtig ist. Nur im Limes $x = \text{const.} \neq x'$, $t \to 0$ stimmen (28) und $\tilde{g}$ aus Gleichung (24) überein, nicht aber im Limes $t = \text{const.}$, $x \to x'$.

Die Verallgemeinerung der Resultate dieses Kapitels ist leicht möglich, solange das Geschwindigkeitsfeld $v(x)$ aus Gleichung (7) ein Markov-Prozeß mit symmetrischer Übergangswahrscheinlichkeit ist; für diesen Fall ist nämlich ein zu Satz 4 analoges, allgemeines Ergebnis bekannt (siehe z.B. Kannan (1979), Kap. 9.7). Daraus folgt insbesondere, daß zeitunabhängige Strömungen mit dem Mittelwert $\langle v(x) \rangle = 0$ und beliebig vorgegebener Zweierkorrelation $\langle v(x)v(x') \rangle$ mit den Methoden aus Abschnitt b.) modelliert werden können. Es ist aber leider nicht möglich, den interessanten Fall $\langle v(x) \rangle \neq 0$ zu behandeln; das hat seinen Grund darin, daß es dann keine einfache Formel mehr für die Wahrscheinlichkeit gibt, daß $v(x)$ in einem vorgegebenen Intervall größer als Null ist.

KAP. III TRANSPORT IN EINER ZWEIDIMENSIONALEN INKOMPRESSIBLEN STRÖMUNG

Die Ortskoordinate $X(t)$ eines trägheitslosen Teilchens ist eine monotone Funktion der Zeit, wenn das transportierende Geschwindigkeitsfeld $v(x)$ eindimensional und zeitunabhängig ist; von dieser Eigenschaft haben wir im vorangehenden Kapitel entscheidenden Gebrauch gemacht, um den mittleren Propagator zu berechnen. Eine wesentliche Annahme war dort außerdem, daß $v(x)$ durch einen Markov-Prozeß gegeben ist oder zumindest approximiert werden kann. Beide Konzepte, sowohl das der Monotonie einer Funktion als auch das eines Markov-Prozesses, verlieren ihren Sinn, wenn Geschwindigkeitsfeld und Teilchentrajektorie höherdimensionale Funktionen sind. Zur Untersuchung des zweidimensionalen Problems sind unsere eindimensionalen Ergebnisse also wertlos. Es gelingt jedoch auch in diesem Fall, ein realistisches stochastisches Modell für ein zeitunabhängiges Geschwindigkeitsfeld zu konstruieren und seine Transporteigenschaften explizit und elementar zu berechnen. In diesem Sinne ist es also der selbe grundsätzliche Lösungsgedanke, der im Ein- wie im Mehrdimensionalen zum Ziel führt.

Wir berechnen im folgenden den exakten mittleren Propagator $g(\vec{x},\vec{x}',t)$ für die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\rho = 0\,; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0\,. \tag{29}$$

$\vec{v}(\vec{x})$ ist darin eine homogene und isotrope stochastische

Modellströmung, deren Zweierkorrelation $\overleftrightarrow{R}(\vec{x}-\vec{x}') \equiv \langle \vec{v}(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x}') \rangle$ beliebig vorgegeben werden kann; für den Mittelwert muß $\langle \vec{v}(x) \rangle = 0$ gelten wegen der speziellen Symmetrieeigenschaften von $\vec{v}(\vec{x})$. Durch geeignete Wahl der freien Parameter von $\vec{v}(\vec{x})$ bestimmen wir außerdem näherungsweise den mittleren Propagator von (29) für den Fall eines beliebig vorgegebenen Geschwindigkeitsfeldes.

a.) Konstruktion einer zweidimensionalen Modellströmung

Wir definieren ein inkompressibles stochastisches Geschwindigkeitsfeld durch

$$(30)\quad \vec{v}(\vec{x}) := \zeta(x\cos\Phi + y\sin\Phi)\begin{pmatrix}\sin\Phi\\-\cos\Phi\end{pmatrix} \equiv \zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\Phi)\,\vec{e}_\Phi^{\perp}\,;$$

$$\vec{x} \equiv (x,y)\,;\quad \vec{e}_\Phi := (\cos\Phi, \sin\Phi)\,;\quad \vec{e}_\Phi^{\perp} := (\sin\Phi, -\cos\Phi)\,.$$

$\zeta(y)$ ist darin ein beliebiger homogener stochastischer Prozeß mit der Zweipunkt-Korrelation

$$\langle \zeta\zeta \rangle(a) = \langle \zeta\zeta \rangle(|a|) := \langle \zeta(y)\zeta(y+a) \rangle$$

und Φ eine im Intervall $[0,2\pi)$ gleichverteilte, von ζ unabhängige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$(31)\quad f_\Phi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\,, & \varphi \in [0,2\pi) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für die Einheitsvektoren $\vec{e}_\Phi$ und $\vec{e}_\Phi^\perp$ gilt offensichtlich

$$\vec{e}_\Phi \cdot \vec{e}_\Phi^\perp = 0 \quad .$$

In Fig. 4 ist eine typische Realisierung von $\vec{v}(\vec{x})$ dargestellt. Das Geschwindigkeitsfeld zeigt in der ganzen Ebene in Richtung des zufälligen Einheitsvektors $\vec{e}_\Phi$ und variiert nur senkrecht zu ihm. Die unterschiedliche Größe der Pfeilspitzen entspricht verschiedenen Werten von $|\vec{v}|$.
Für den Mittelwert von $\vec{v}$ gilt

Satz 10. Sei $\vec{v}(\vec{x})$ das durch Gleichung (30) definierte Geschwindigkeitsfeld. Dann ist

$$\langle \vec{v}(\vec{x}) \rangle = 0 \quad .$$

Beweis: Da $\zeta(y)$ ein homogener Prozeß ist, können wir schreiben

$$\langle \vec{v}(\vec{x}) \rangle \equiv \langle \zeta(x\cos\Phi + y\sin\Phi) \begin{pmatrix} \sin\Phi \\ -\cos\Phi \end{pmatrix} \rangle$$

$$= \langle \zeta(0) \begin{pmatrix} \sin\Phi \\ -\cos\Phi \end{pmatrix} \rangle \quad .$$

ζ und Φ sind unabhängig, also gilt

$$\langle \zeta(0) \begin{pmatrix} \sin\Phi \\ -\cos\Phi \end{pmatrix} \rangle = \langle \zeta(0) \rangle \langle \begin{pmatrix} \sin\Phi \\ -\cos\Phi \end{pmatrix} \rangle \quad .$$

und es folgt

$$\langle \vec{v}(\vec{x}) \rangle = 0 \quad .$$

Das Satz 10 entsprechende Ergebnis für die Zweierkorrelation lautet:

Satz 11. Der Zweipunkt-Korrelationstensor $\overleftrightarrow{R}(\vec{x},\vec{x}') \equiv \equiv \langle \vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}') \rangle$ für das durch Gleichung (30) definierte Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ ist homogen und isotrop und erfüllt die Beziehung

$$(32)\quad \overleftrightarrow{R}(\vec{x},\vec{x}') = \overleftrightarrow{R}(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \langle \zeta\zeta \rangle (|(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{e}_\varphi|)\, \overleftrightarrow{e_\varphi e_\varphi} .$$

Darin ist $\vec{e}_\varphi := (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\vec{e}_\varphi^{\,\perp} := (\sin\varphi, -\cos\varphi)$ und $\overleftrightarrow{e_\varphi e_\varphi}$ das dyadische Produkt von $\vec{e}_\varphi$ mit sich selbst.

Beweis: Aufgrund der Definition von $\vec{v}(\vec{x})$ gilt

$$\langle \vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}') \rangle = \langle \zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\varphi)\,\zeta(\vec{x}'\cdot\vec{e}_\varphi)\, \overleftrightarrow{e_\varphi^\perp e_\varphi^\perp} \rangle .$$

Wir berechnen zunächst die gemeinsame Verteilungsfunktion $f_{\zeta\zeta',\Phi}(z,\varphi)$ von $\zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\varphi)\,\zeta(\vec{x}'\cdot\vec{e}_\varphi)$ und Φ, um diesen Erwartungswert zu bestimmen. Sei $W\{\cdot\}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{\cdot\}$. Es gilt

$$f_{\zeta\zeta',\Phi}(z,\varphi)\,dz\,d\varphi \equiv W\{\zeta\zeta' \in [z, z+dz] \text{ und } \Phi \in [\varphi, \varphi+d\varphi]\}$$

$$= W\{\zeta\zeta' \in [z, z+dz] \,|\, \Phi \in [\varphi, \varphi+d\varphi]\}\; W\{\Phi \in [\varphi, \varphi+d\varphi]\}$$

Dabei haben wir die Abkürzungen $\zeta \equiv \zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\varphi)$ und $\zeta' = \zeta(\vec{x}'\cdot\vec{e}_\varphi)$ verwendet. $W\{A\,|\,B\}$ bezeichnet hier die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Voraussetzung, daß B eingetreten

ist. Es gilt die fundamentale Identität $W\{A \text{ und } B\} = W\{A|B\}W\{B\}$.

Unter der Voraussetzung "$\Phi \in [\varphi, \varphi+d\varphi]$" gilt $\vec{e}_\Phi = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, und wir erhalten

$$W\{\zeta\zeta' \in [z, z+dz] \mid \Phi \in [\varphi, \varphi+d\varphi]\}$$
$$= W\{\zeta(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\,\zeta(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi) \in [z, z+dz]\}$$
$$=: f_{\zeta\zeta'}(z|\varphi)\,dz \quad .$$

$f_{\zeta\zeta'}(z|\varphi)$ bezeichnet die Verteilungsfunktion von $\zeta(x\cos\varphi + y\sin\varphi) \cdot \zeta(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi)$. Sie hängt von (x, y) und (x', y') sowie von φ ab und kann aus der Zweipunkt-Verteilungsfunktion $f_{\zeta(a)\zeta(b)}^{(z_1, z_2)}$ des stochastischen Prozesses ζ berechnet werden. Ihre genaue Form wird hier nicht benötigt.

Für $f_{\zeta\zeta',\Phi}$ folgt also

$$f_{\zeta\zeta',\Phi}(z, \varphi)\,dz\,d\varphi = f_{\zeta\zeta'}(z|\varphi)\,dz\,f_\Phi(\varphi)\,d\varphi \quad .$$

Damit können wir für den Erwartungswert $\langle \vec{v}(\vec{x}')\vec{v}(\vec{x}) \rangle$ schreiben

$$\text{(i)} \quad \langle \vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \; z \begin{pmatrix} \sin^2\varphi\,; & -\cos\varphi\sin\varphi \\ -\cos\varphi\sin\varphi\,; & \cos^2\varphi \end{pmatrix} \times$$
$$\times f_{\zeta\zeta'}(z|\varphi)\,f_\Phi(\varphi) \quad .$$

$f_{\zeta\zeta'}(z, \varphi)dz$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Zufallsvariable $\zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\varphi)\zeta(\vec{x}'\cdot\vec{e}_\varphi)$ für vorgegebene Werte x, x', y, y', φ im Intervall $[z, z+dz]$ liegt. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \; z\, f_{\zeta\zeta'}(z|\varphi)$$

der Erwartungswert von $\zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\varphi)\,\zeta(\vec{x}'\cdot\vec{e}_\varphi)$ für diese feste Wahl von x, x', y, y', φ , also

$$\langle\zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\varphi)\,\zeta(\vec{x}'\cdot\vec{e}_\varphi)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\; z f_{\zeta\zeta'}(z/\varphi) \,.$$

ζ ist ein homogener Prozeß mit der Zweipunkt-Korrelation

$$\langle\zeta\zeta\rangle(|a|) = \langle\zeta(y)\,\zeta(y+a)\rangle \,.$$

und es folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz\; z f_{\zeta\zeta'}(z/\varphi) = \langle\zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\varphi)\,\zeta(\vec{x}'\cdot\vec{e}_\varphi)\rangle = \langle\zeta\zeta\rangle(|(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{e}_\varphi|) \,.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in (i) ein, so erhalten wir mit (31)

$$\langle\vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\langle\zeta\zeta\rangle(|(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{e}_\varphi|)\begin{pmatrix}\sin^2\varphi; & -\cos\varphi\sin\varphi\\ -\cos\varphi\sin\varphi; & \cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

aufgrund der Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen ($\sin(\varphi+\pi) = -\sin\varphi$, $\cos(\varphi+\pi) = -\cos\varphi$) folgt daraus

(ii) $$\overleftrightarrow{R}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\,\langle\zeta\zeta\rangle(|(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{e}_\varphi|)\begin{pmatrix}\sin^2\varphi; & -\cos\varphi\sin\varphi\\ -\cos\varphi\sin\varphi; & \cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

Damit ist (32) bewiesen.

Den Ausdruck (ii) müssen wir nun noch mit Gleichung (D.i) aus Anhang D vergleichen, welche die "Normalform" von $\overleftrightarrow{R}$ für den Fall homogener und isotroper Turbulenz angibt. (ii) und (D.i) sind identisch, wenn

(iii) $$\frac{1}{\pi}\langle\zeta\zeta\rangle(|a|) = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\,|\kappa|^3 H(|\kappa|)\,e^{i\kappa a}$$

gilt für eine geeignete Funktion $A(|k|)$. Da $\langle \xi\xi \rangle$ von $|a|$ abhängt, ist seine Fourier-Transformierte eine Funktion von $|k|$. Also gibt es immer eine Funktion $A(|k|)$ derart, daß (iii) erfüllt ist, und $\vec{R}$ ist homogen und isotrop. Damit ist Satz 11 vollständig bewiesen.-

Unser durch Gleichung (30) definiertes Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ zeigt in der ganzen Ebene in die selbe Richtung. Damit haben wir natürlich eine sehr spezielle Wahl getroffen, und die Frage liegt nahe, ob $\vec{v}(\vec{x})$ überhaupt geeignet ist, um allgemeinere turbulente Strömungen zu modellieren. Die Antwort darauf gibt

Satz 12. Sei $\vec{w}(\vec{x})$ eine beliebige homogene und isotrope turbulente Strömung mit der Einpunkt-Verteilung $f_{w_x}(w) = f_{w_y}(w) \equiv f_w(w)$ für die beiden Komponenten $w_x(x,y)$ und $w_y(x,y)$. $\vec{v}(\vec{x}) = \zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\xi)\vec{e}_\xi^\perp$ sei das Geschwindigkeitsfeld (30) und $f_{v_x}(v) = f_{v_y}(v) \equiv f_v(v)$ die Verteilungsfunktion der beiden Komponenten von $\vec{v}(\vec{x})$. Dann gilt

$$\langle \vec{w}(\vec{x})\vec{w}(\vec{x}') \rangle = \langle \vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}') \rangle$$

und

$$f_w = f_v$$

für einen geeignet gewählten stochastischen Prozeß $\zeta(y)$.

Beweis: Wenn $\vec{w}(\vec{x})$ homogene und isotrope statistische Eigenschaften hat, ist

$$\langle \vec{w}(\vec{x})\vec{w}(\vec{x}')\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,|k|^3 A(|k|) \int_0^{\pi} dy\, e^{ik(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{e}_y} \overleftrightarrow{e_y^{\perp} e_y^{\perp}}$$

wie in Anhang D gezeigt wird. Man macht sich leicht klar, daß

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,|k|^3 A(|k|)\, e^{ika}$$

nur von $|a|$ abhängt; wir können also definieren

$$\text{(ii)} \quad \langle \zeta\zeta\rangle(|a|) := -\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,|k|^3 A(|k|)\, e^{ika} \,.$$

wodurch (i) und Gleichung (32) aus Satz 11 formal identisch werden. Aus der Theorie der stochastischen Prozesse ist bekannt, daß es zu vorgegebenem $\langle\zeta\zeta\rangle(|a|)$ und vorgegebener Verteilungsfunktion $f_\zeta(z)$ stets einen stationären Markov-Prozeß $\zeta(y)$ gibt, dessen Einpunkt-Verteilung durch $f_\zeta(z)$ und dessen Zweipunkt-Korrelation durch $\langle\zeta(y)\zeta(y+a)\rangle = \langle\zeta\zeta\rangle(|a|)$ gegeben ist (siehe z.B. Arnold (1973), Seite 48-49). Also können wir in Gleichung (30) den Prozeß $\zeta(y)$ so wählen, daß die Einpunkt-Verteilungen von $\vec{w}(\vec{x})$ und $\vec{v}(\vec{x})$ identisch werden und $\langle\zeta\zeta\rangle(|a|) \equiv \langle\zeta(y)\zeta(y+a)\rangle$ durch (ii) gegeben ist. Wenn aber die Zweipunkt-Korrelation des Prozesses $\zeta(y)$ Gleichung (ii) erfüllt, so folgt mit (i) und (32) $\langle\vec{w}(\vec{x})\vec{w}(\vec{x}')\rangle = \langle\vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle$.-

In Abschnitt (I.c) haben wir die plausible, auch aus technischen Gründen notwendige Hypothese aufgestellt, daß die Ein- und Zweipunkt-Momente oder, was das selbe ist, die Ein- und Zweipunkt-Verteilungsfunktionen eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes zur Beschreibung seiner Transporteigenschaften

ausreichend sind. Wenn wir die Gültigkeit dieser Annahme einmal voraussetzen, hätten wir das Transportproblem gelöst, wenn wir nicht nur $\langle \vec{w}(\vec{x})\,\vec{w}(\vec{x}')\rangle$, sondern sämtliche Zweipunkt-Momente einer gegebenen Strömung $\vec{w}(\vec{x})$ durch unser Modellfeld (30) reproduzieren könnten. Wir brauchten dann nur $\zeta(y)$ so zu wählen, daß Ein- und Zweipunkt-Momente von $\vec{v}(\vec{x})$ und $\vec{w}(\vec{x})$ übereinstimmen, und unsere Hypothese würde garantieren, daß auch der mittlere Propagator für die beiden Strömungen identisch ist (wir werden noch zeigen, daß $g(\vec{x},\vec{x}',t)$ für das Geschwindigkeitsfeld (30) exakt berechnet werden kann). Man überzeugt sich jedoch leicht, daß die Zweipunkt-Momente von $\vec{v}(\vec{x})$ leider nicht alle beliebig vorgegeben werden können: Es gilt laut Definition

$$\begin{pmatrix} v_x(\vec{x}) \\ v_y(\vec{x}) \end{pmatrix} = \zeta(\vec{x}\cdot\vec{e}_\Phi)\begin{pmatrix} \sin\Phi \\ -\cos\Phi \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} v_x(\vec{x}') \\ v_y(\vec{x}') \end{pmatrix} = \zeta(\vec{x}'\cdot\vec{e}_\Phi)\begin{pmatrix} \sin\Phi \\ -\cos\Phi \end{pmatrix} ;$$

daraus folgt

$$(33) \qquad v_y(\vec{x}') = -v_x(\vec{x}')\frac{\cos\Phi}{\sin\Phi} = v_x(\vec{x}')\frac{v_y(\vec{x})}{v_x(\vec{x})} .$$

Die gemeinsame Verteilungsfunktion $f_{\vec{v}(\vec{x}),\vec{v}(\vec{x}')}(v_1,v_2,v_3,v_4)$ von $\vec{v}(\vec{x})$ und $\vec{v}(\vec{x}')$ ist also von der Form

$$(34) \qquad f_{\vec{v}(\vec{x}),\vec{v}(\vec{x}')}(v_1,v_2,v_3,v_4) = g(v_1,v_2,v_3)\,\delta\left(v_4 - \frac{v_2 v_3}{v_1}\right) ;$$

denn wenn $v_x(\vec{x})=v_1$ und $v_y(\vec{x})=v_2$ und $v_x(\vec{x}')=v_3$ gilt, muß wegen (33) $v_y(\vec{x}')=\frac{v_2 v_3}{v_1}$ sein. Um sämtliche Zweipunkt-Momente

von $\vec{v}(\vec{x})$ beliebig wählen zu können, muß $f_{\vec{v}(\vec{x}),\vec{v}(\vec{x}')}$ beliebig vorgebbar sein; diese beiden Forderungen sind äquivalent. Wegen (34) ist das aber nicht möglich, und es folgt, daß unser Modell nicht die allgemeinen Eigenschaften hat, welche man aufgrund der oben formulierten Hypothese fordern sollte.
Wir können aber trotzdem davon ausgehen, daß $\vec{v}(\vec{x})$ eine realistische Beschreibung für den Transport in einer "echten" turbulenten Strömung liefert: Die in Abschnitt (I.c) aufgestellte Hypothese ist bis zu einem gewissen Maße willkürlich, denn es wird ja nie möglich sein, sämtliche Zweipunkt-Momente eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes experimentell zu bestimmen; also brauchen wir auch keine Theorie, die sie alle berücksichtigt. In unserem Fall beschränken wir uns im Sinne einer ersten Näherung auf die Zweipunkt-Korrelation $\langle\vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle$. In Kapitel IV werden wir anhand numerischer Experimente zeigen, daß man dadurch bereits eine angemessene Beschreibung turbulenter Transportvorgänge erhält.

b.) Berechnung des mittleren Propagators für die Modellströmung sowie für beliebige zweidimensionale Strömungen

Wir bestimmen nun den mittleren Propagator $g(\vec{x},\vec{x}',t)$ für die Gleichung (29) mit dem durch (30) definierten $\vec{v}(\vec{x})$. Wegen Satz 12 erhalten wir dadurch gleichzeitig eine Näherung für $g(\vec{x},\vec{x}',t)$, wenn $\vec{v}(\vec{x})$ in (29) ein beliebig vorgegebenes Geschwindigkeitsfeld ist.
Die statistischen Eigenschaften einer homogenen und isotropen

Strömung zeichnen keinen Punkt und keine Richtung der Ebene aus; also muß

$$g(\vec{x},\vec{x}',t) = g(|\vec{x}-\vec{x}'|,t) \tag{34}$$

gelten, und es genügt, den Fall $\vec{x}'=0$ zu betrachten. $g(\vec{x},0,t)d^2x$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, ein Teilchen mit der Ortskoordinate $\vec{X}(t)$ zur Zeit t an der Stelle $\vec{X}(t)=\vec{x}$ anzutreffen, wenn es sich bei $t=0$ am Ort $\vec{X}(0)=0$ befand und gemäß

$$\dot{\vec{X}}(t) = \vec{v}(\vec{X}(t)) \; ; \quad \vec{X}(0)=0 \tag{35}$$

transportiert wird. Für unsere Modellströmung ist die Bewegungsgleichung (35) gegeben durch

$$\dot{\vec{X}}(t) \equiv \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \zeta(|\vec{X}(t)|\cos\varphi + Y(t)\sin\varphi)\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{X}(0)=0 \; ; \tag{36}$$

die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\vec{X}(t) = \zeta(0)\,t\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix} \equiv \vec{v}(\vec{X}(0))\,t \; , \tag{37}$$

wie man leicht verifiziert. Dies entspricht einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung des Vektors $(\sin\varphi, -\cos\varphi)$, was wegen der speziellen Form von $\vec{v}(\vec{x})$ (vgl. Fig. 4) ja auch zu erwarten war.

Gleichung (37) zeigt, daß die Teilchenbewegung in unserer Mo-

dellströmung (30) durch die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens vollständig festgelegt ist. Einzig der Wert des Geschwindigkeitsfeldes an der Stelle $\vec{X}(0)$ ist für den zeitlichen Verlauf der Trajektorie $\vec{X}(t)$ maßgebend, die Werte an allen anderen Punkten haben keinen Einfluß darauf. Das muß natürlich so sein, weil die Feldlinien von $\vec{v}(\vec{x})$ Geraden sind; trotzdem ist dieses Ergebnis aber äußerst erstaunlich, wenn man es mit den herkömmlichen Vorstellungen von turbulenten Transportvorgängen vergleicht: Sämtliche uns bekannten Theorien gehen davon aus, daß es die Zweipunkt-Korrelation $\langle \vec{w}(\vec{x})\vec{w}(\vec{x}')\rangle$ ist, die den Teilchentransport in einer turbulenten Strömung $\vec{w}(\vec{x})$ maßgeblich bestimmt; nicht einmal andeutungsweise wird in der Literatur die Möglichkeit erwogen, daß diese Größe für die Behandlung des Problems unwesentlich sein könnte. Mit unserer Modellströmung (30) haben wir aber nun ein Zufallsfeld gefunden, dessen Korrelationstensor $\langle \vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle$ beliebig vorgegeben werden kann und dessen Transportverhalten trotzdem nur von seiner Einpunkt-Verteilung abhängt. Wir werden in Kapitel IV anhand numerischer Experimente untersuchen, wie gut unser Modell den Teilchentransport in einer allgemeinen turbulenten Strömung beschreibt.

Mit Hilfe von (37) können wir nun den exakten mittleren Propagator für das Geschwindigkeitsfeld (30) bzw., wegen Satz 12, den genäherten mittleren Propagator für eine beliebige zeitunabhängige Strömung bestimmen. $g(\vec{x},0,t)$ $(\vec{x}\equiv(x,y))$ ist identisch mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $f_{\vec{X}(t)}(x,y)$ der zweidimensionalen Zufallsvariablen $\vec{X}(t)=\vec{v}(\vec{X}(0))t$, welche mit den Standardmethoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt werden kann (siehe z.B. Papoulis (1965), Seite 234). Dazu ist zunächst

das Gleichungssystem

$$x = v_1 t$$
$$y = v_2 t \tag{38}$$

nach v_1 und v_2 aufzulösen; das ergibt

$$v_1 = \frac{x}{t} \quad ; \quad v_2 = \frac{y}{t} \quad .$$

Wir bezeichnen die gemeinsame Verteilungsfunktion von $v_x(\vec{\underline{x}}(0))$ und $v_y(\vec{\underline{x}}(0))$ mit $f_{\vec{v}}(\sqrt{v_1^2 + v_2^2})$; wegen der Homogenität und Isotropie von $\vec{v}(\vec{x})$ hängt $f_{\vec{v}}$ nicht von $\vec{\underline{x}}(0)$ ab. Wir erhalten damit

$$f_{\vec{\underline{x}}(t)}(x,y) = \frac{f_{\vec{v}}\left(\sqrt{v_1(x,y)^2 + v_2(x,y)^2}\right)}{|J(x,y)|} \quad ; \tag{39}$$

dabei ist

$$J(x,y) := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v_1} & \frac{\partial x}{\partial v_2} \\ \frac{\partial y}{\partial v_1} & \frac{\partial y}{\partial v_2} \end{vmatrix} \quad .$$

Mit (38) ergibt sich

$$J(x,y) = t^2 \quad ,$$

also

$$f_{\vec{\underline{x}}(t)}(x,y) = \frac{f_{\vec{v}}\left(\sqrt{\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2}}\right)}{t^2} \quad .$$

Damit ist der mittlere Propagator für das Gleichungssystem (29)/(30) gegeben durch

$$(40)\qquad g(\vec{x},\vec{x}',t)=\frac{1}{t^2}\,f_{\vec{v}}\left(\sqrt{\frac{(x-x')^2}{t^2}+\frac{(y-y')^2}{t^2}}\right);$$

hierbei haben wir (34) verwendet.

Sei nun $\vec{w}(\vec{x})$ ein beliebiges zeitunabhängiges, inkompressibles, homogenes und isotropes turbulentes Geschwindigkeitsfeld. Um den mittleren Propagator für die Gleichung

$$(41)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{w}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\rho=0$$

näherungsweise zu bestimmen, wählen wir das Modellfeld (30) so daß seine Einpunkt-Verteilung $f_{\vec{v}}$ sowie seine Zweipunkt-Korrelation $\langle\vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle$ mit den entsprechenden Größen $f_{\vec{w}}$ und $\langle\vec{w}(\vec{x})\vec{w}(\vec{x}')\rangle$ übereinstimmt; wegen Satz 12 ist das immer möglich. Der genäherte mittlere Propagator für die Gleichung (41) ist dann durch den exakten mittleren Propagator für die Gleichungen (29)/(30) gegeben, also durch $g(\vec{x},\vec{x}',t)$ aus Gleichung (40). Da aber (40) gar nicht von $\langle\vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle$ abhängt, reicht es für die praktische Bestimmung des Propagators aus, die Beziehung $f_{\vec{v}}=f_{\vec{w}}$ zu erfüllen.

Wir fassen unsere Überlegungen zusammen in

Satz 13. Sei $\vec{w}(\vec{x})$ ein inkompressibles, homogenes und isotropes Geschwindigkeitsfeld mit der Einpunkt-Verteilung

$$f_{\vec{w}}(w_1,w_2)=f_{\vec{w}}\left(\sqrt{w_1^2+w_2^2}\right).$$

Dann ist der mittlere Propagator für die Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{w}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \rho = 0 \tag{41}$$

näherungsweise gegeben durch

$$g(\vec{x}, \vec{x}', t) \cong \frac{1}{t^2} f_{\vec{w}} \left(\sqrt{\frac{(x-x')^2}{t^2} + \frac{(y-y')^2}{t^2}} \right) . \tag{42}$$

Es ist eine allgemein akzeptierte Tatsache, daß (42) den mittleren Propagator richtig beschreibt, wenn das diffundierende Teilchen sich noch nicht sehr weit von seinem Anfangsort entfernt hat (vgl. Glg. (28)). Unser Modell sagt dagegen voraus, daß diese Gleichung auch für größere Zeiten zumindest eine gute Näherung darstellt.

c.) Abschließende Bemerkungen zum zweidimensionalen Problem

In diesem Kapitel haben wir durch Konstruktion eines geeigneten stochastischen Modells gezeigt: Wenn es zutrifft, daß turbulente Strömungen mit identischen Einpunkt-Verteilungen und identischen Zweipunkt-Korrelationstensoren die gleichen Transporteigenschaften haben, so sind diese bereits durch die Einpunkt-Verteilung vollständig bestimmt. Um den turbulenten Teilchentransport wirklich zu verstehen, müßte natürlich noch begründet werden, weshalb es gerade diese statistischen Eigenschaften sind, von

denen der Transportvorgang abhängt, und weshalb man höhere Momente zumindest näherungsweise vernachlässigen kann. Auf Fragen dieser Art gibt es leider noch keine Antwort, und deshalb stellt diese Arbeit in gewissem Sinne einen phänomenologischen Ansatz zur Behandlung der turbulenten Diffusion dar. Das Problem hat sich jedoch in der Vergangenheit als so komplex und untraktabel erwiesen, daß man wohl nur sehr schwer ohne plausible Hypothesen zu brauchbaren Ergebnissen gelangen kann.

Unser Modell kann ohne Schwierigkeiten auch auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinert werden, indem man $\vec{e}_{\frac{1}{2}}$ und $\vec{e}_{\frac{1}{2}}^{\perp}$ als dreidimensionale Vektoren auffaßt, die über die Oberfläche der Einheitskugel gleichverteilt sind. Anstelle von (42) erhält man dann

$$(43) \quad g(\vec{x},\vec{x}';t) \cong \frac{1}{t^3} f_{\vec{w}}\left(\sqrt{\frac{(x-x')^2}{t^2} + \frac{(y-y')^2}{t^2} + \frac{(z-z')^2}{t^2}}\right).$$

KAP. IV VERGLEICH DER THEORIE MIT NUMERISCHEN EXPERIMENTEN

Wir haben bei der Herleitung unserer analytischen Resultate idealisierende Annahmen machen müssen, die für reale turbulente Strömungen normalerweise nicht erfüllt sind. So beschränkten wir uns zum Beispiel auf zeitunabhängige Geschwindigkeitsfelder, welche nur für die Anfangsphase des turbulenten Diffusionsvorgangs eine brauchbare Näherung darstellen. Darüber hinaus wurde die molekulare Diffusion, die natürlich immer zusätzlich zum konvektiven Transportmechanismus vorhanden ist, nicht berücksichtigt. Wirkliche Strömungen sind auch nicht homogen und isotrop; diese Eigenschaft kann man nur näherungsweise erreichen, und der Einfluß von Anisotropie und Inhomogenität läßt sich nur schwer abschätzen. Bevor unsere Theorie zur Analyse von Diffusionsexperimenten dienen und durch sie bestätigt werden kann, muß sie also entsprechend verallgemeinert werden; zumindest aber muß quantitativ bestimmt werden können, welchen Einfluß Effekte, die wir bisher nicht berücksichtigen konnten, auf den Diffusionsvorgang haben. Vor allem die Frage nach der Wechselwirkung zwischen molekularer und turbulenter Diffusion (Saffman 1962, Phythian und Curtis 1978) ist bisher zwar untersucht, jedoch noch nicht zufriedenstellend beantwortet worden; es scheint nur klar zu sein, daß ein endlicher molekularer Diffusionskoeffizient bereits die Anfangsphase des turbulenten Diffusionsvorgangs beeinflußt.

Um unsere theoretischen Ergebnisse trotz dieser Schwierigkeiten mit der Wirklichkeit vergleichen zu können, haben wir sie mit Hilfe von numerischen Experimenten überprüft. Dieser Test

ist vor allem deshalb wichtig, weil wir mit unseren Modellen zum ersten Mal ortsabhängige turbulente Strömungen gefunden haben, für die der Teilchentransport exakt und auf elementare Weise berechnet werden kann. Wenn wir demonstrieren könnten, daß die Eigenschaften unserer Modellströmungen auch für allgemeine turbulente Geschwindigkeitsfelder typisch sind, wäre damit endlich ein Fortschritt, möglicherweise der Durchbruch in einem lange ungelösten, grundsätzlichen Problem der Turbulenztheorie gelungen.

Jede Strömung kann als inkompressibel angesehen werden, wenn ihre Geschwindigkeit hinreichend viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit der strömenden Substanz ist. Für praktische Anwendungen ist dieser Typus deshalb besonders wichtig, und entsprechend eingehend wurde er in der Vergangenheit untersucht. Wir werden im folgenden unsere numerischen Experimente ebenfalls auf den inkompressiblen Fall beschränken. Wir wollen herausfinden, wie relevant die Ergebnisse unseres in Kapitel III vorgestellten einfachen Modells für das Transportverhalten einer beliebigen turbulenten Strömung sind. Gleichbedeutend damit ist die Frage, inwieweit turbulenter Teilchentransport bereits durch die Einpunkt-Verteilung des transportierenden Geschwindigkeitsfeldes bestimmt ist. Um das zu untersuchen, wählen wir ein (zeitunabhängiges) Caußsches Geschwindigkeitsfeld als Beispiel für eine allgemeine turbulente Strömung und berechnen die Bahnen einer großen Anzahl trägheitslos transportierter Teilchen. Daraus konstruieren wir dann den mittleren Propagator $g(\vec{x},\vec{x}',t)$ als Funktion der Zeit und vergleichen das Ergebnis mit der Vorhersage unseres Modells, Gleichung (42).

Die numerische Simulation, welche wir in diesem Kapitel beschreiben, ist im wesentlichen identisch mit der von Kraichnan (1970). Er fand in seiner Arbeit durch Zufall das (für ihn) überraschende Ergebnis, daß der numerisch berechnete Propagator für eine dreidimensionale, zeitunabhängige Gaußsche Strömung durch die Einpunktverteilung des Geschwindigkeitsfeldes gegeben war, also durch Gleichung (43). Das ist gerade die Behauptung, welche wir im folgenden für den zweidimensionalen Fall verifizieren wollen. Auch dieser wurde von Kraichnan bereits behandelt, jedoch in seiner Arbeit nicht ausführlich vorgestellt. Man findet dort aber die Bemerkung, die zweidimensionalen Ergebnisse seien ähnlich den dreidimensionalen: Der mittlere Propagator sei wieder von der durch (42) gegebenen Form. Damit haben wir also den ersten Hinweis darauf, daß unsere Modellströmung den Teilchentransport in einem beliebigen turbulenten Geschwindigkeitsfeld vorhersagen kann.

a.) Konstruktion eines numerisch realisierbaren Gaußschen Geschwindigkeitsfeldes und Berechnung des zugehörigen mittleren Propagators

Wir definieren ein zweidimensionales, inkompressibles, zeitunabhängiges Geschwindigkeitsfeld durch

$$(44)\quad \vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \left[\vec{v}(\vec{k}_n) \cos \vec{k}_n \cdot \vec{x} + \vec{w}(\vec{k}_n) \sin \vec{k}_n \cdot \vec{x} \right] ;$$

$$\vec{v}(\vec{k}_n) := \zeta_n \vec{e}_z \times \vec{k}_n \quad ;$$

$$\vec{w}(\vec{k}_n) := \xi_n \vec{e}_z \times \vec{k}_n \quad ;$$

$$|\vec{k}_n| = K_0 \; .$$

Der Einheitsvektor $\vec{e}_z$ steht dabei senkrecht auf der Ebene des Geschwindigkeitsfeldes. Die ζ_n und ξ_n sind gaußverteilte Zufallsvariable mit

$$\left.\begin{aligned} \langle\zeta_n\rangle &= \langle\xi_n\rangle = 0 \\ \langle\zeta_n^2\rangle &= \langle\xi_n^2\rangle = \frac{v_0^2}{K_0^2} \end{aligned}\right\} \text{ für alle } n \ .$$

ζ_n und ξ_n sind unabhängig für alle n,m : ζ_n, ζ_m und ξ_n, ξ_m sind unabhängig für $n \neq m$. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß $\vec{v}(\vec{x})$ ein Gaußsches Geschwindigkeitsfeld ist; durch Angabe von $\langle\vec{v}(\vec{x})\rangle$ und $\langle\vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle$ sind seine statistischen Eigenschaften also eindeutig bestimmt. Es gilt offensichtlich

$$\langle\vec{v}(\vec{x})\rangle = 0 \ . \tag{45}$$

Weiter haben wir

$$\langle\vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\langle\vec{v}(\vec{K}_n)\vec{v}(\vec{K}_n)\rangle \cos\vec{K}_n\cdot\vec{x}\,\cos\vec{K}_n\cdot\vec{x}' + \langle\vec{w}(\vec{K}_n)\vec{w}(\vec{K}_n)\rangle \sin\vec{K}_n\cdot\vec{x}\,\sin\vec{K}_n\cdot\vec{x}'\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{v_0^2}{K_0^2}\begin{pmatrix} K_{nY}^2 ; & -K_{nx}K_{nY} \\ -K_{nx}K_{nY} ; & K_{nx}^2 \end{pmatrix}\cos\vec{K}_n\cdot(\vec{x}-\vec{x}') \ ;$$

dabei wurde ausgenutzt, daß $\langle\zeta_n\zeta_m\rangle = 0$ für $n \neq m$ sowie $\langle\zeta_n\xi_m\rangle = 0$ für alle n,m gilt.

Laut Voraussetzung gilt $|\vec{K}_n| = K_0$. Wir nehmen an, daß die $\vec{K}_n$ gleichmäßig über den Kreis mit Radius K_0 verteilt sind und

können deshalb für $N \to \infty$ schreiben

$$\langle \vec{v}(\vec{x})\,\vec{v}(\vec{x}')\rangle \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\; v_0^2 \begin{pmatrix} \sin^2\varphi\,; & -\cos\varphi\sin\varphi \\ -\cos\varphi\sin\varphi\,; & \cos^2\varphi \end{pmatrix} \times$$

$$\times \cos\left\{K_0(x-x')\cos\varphi + K_0(y-y')\sin\varphi\right\} .$$

Dieser Tensor entsteht aus der in Gleichung (D.i) angegebenen "Normalform" der Zweierkorrelation für homogene, isotrope Turbulenz durch die Wahl

$$A(K) = -\frac{v_0^2}{2\pi K_0^3}\,\delta(K-K_0) .$$

Alle vier Elemente von $\langle \vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle$ können durch Differentiation berechnet werden aus

$$\langle \vec{v}(\vec{x})\cdot\vec{v}(\vec{x}')\rangle = \frac{v_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\cos\left\{K_0 r\cos(\varphi-\varphi')\right\} \quad ;$$

$$r := \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} \qquad x-x' = r\cos\varphi' \qquad y-y' = r\sin\varphi' .$$

Dieses Integral läßt sich durch die Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung ausdrücken; es gilt

(46) $$\langle \vec{v}(\vec{x})\cdot\vec{v}(\vec{x}')\rangle = v_0^2\, J_0(K_0 r) .$$

Damit erhält man

(47a) $$\langle v_x(\vec{x})\,v_x(\vec{x}')\rangle = \frac{v_0^2}{r^2}\left\{\frac{(x-x')^2-(y-y')^2}{K_0 r}\, J_1(K_0 r) + (y-y')^2\, J_0(K_0 r)\right\} ;$$

$$\langle v_x(\vec{x})\, v_y(\vec{x}') \rangle = \frac{v_0^2}{r^2}(x-x')(y-y')\left\{ 2\frac{J_1(K_0 r)}{K_0 r} - J_0(K_0 r)\right\} ; \tag{47b}$$

$$\langle v_y(\vec{x})\, v_y(\vec{x}') \rangle = \frac{v_0^2}{r^2}\left\{ \frac{(y-y')^2-(x-x')^2}{K_0 r} J_1(K_0 r) + (x-x')^2 J_0(K_0 r)\right\} . \tag{47c}$$

In Fig. 5-7 sind einige der hier auftretenden Besselfunktionen dargestellt.

Da $\vec{v}(\vec{x})$ ein Gaußsches Zufallsfeld ist, sind seine statistischen Eigenschaften durch (45) und (47) eindeutig festgelegt. Insbesondere ist $\vec{v}(\vec{x})$ homogen und isotrop, weil $\langle \vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}') \rangle$ ein homogener und isotroper Tensor ist.

Das Geschwindigkeitsfeld (44) läßt sich mit Hilfe eines Gaußschen Zufallszahlengenerators problemlos numerisch realisieren.

Um den mittleren Propagator $g(\vec{x}, \vec{x}'; t)$ numerisch zu berechnen, lösen wir zunächst die Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{X}}(t) = \vec{v}(\vec{X}(t)) \quad ; \quad \vec{X}(0) = 0 \tag{48}$$

für sehr viele Realisierungen von $\vec{v}(\vec{x})$. Wegen der Symmetrie des Geschwindigkeitsfeldes (44) reicht es aus, sich auf die Bestimmung von $g(\vec{x}, 0, t)$ zu beschränken, also nur Trajekto-

rien mit dem Anfangswert $\vec{X}(0)=0$ zu betrachten. Zur numerischen Integration von (48) benutzten wir ein Leapfrog-Schema.

Aus den Lösungen von (48) kann der mittlere Propagator $g(\vec{x},0,t)$ nun leicht berechnet werden: Es gilt $g(\vec{x},0,t) = g(|\vec{x}|,0,t)$ wegen der Symmetrie von $\vec{v}(\vec{x})$; wir unterteilen also die $|\vec{x}|$-Achse in kleine Abschnitte der Länge $\Delta\tau$ und zählen ab, für wieviele der Lösungen von (48) jeweils $\tau-\frac{\Delta\tau}{2} \leq |\vec{X}(t)| \leq \tau+\frac{\Delta\tau}{2}$ gilt. Bezeichnen wir diese Anzahl mit $N(\tau,t)$, so ist der mittlere Propagator an der Stelle τ ungefähr gegeben durch

$$g(\tau,0,t) = \frac{N(\tau,t)}{N_0\,\Delta\tau} \quad .$$

N_0 ist dabei die Gesamtzahl der berechneten Trajektorien. Die Normierung von $g(\tau,0,t)$ ist so gewählt, daß

$$\int_0^\infty g(\tau,0,t)\,d\tau = 1$$

gilt.

Mit den beschriebenen Methoden wurde der Teilchentransport in einer turbulenten Strömung numerisch simuliert. Um das Programm zu überprüfen, verglichen wir zunächst die Korrelationsfunktion (46) mit dem numerisch erzielten Resultat; das Ergebnis ist in Fig. 5 dargestellt. Die eingezeichneten Fehlerbalken erhielten wir durch verschiedene Wahl der Punkte $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ bei jeweils gleichem Abstand $|\vec{x}-\vec{x}'|$. Die Berechnung des mittleren Propagators wurde bereits in Zusammenhang mit dem stochastischen

Beschleunigungsproblem ausführlich getestet (Maasjost und Elsässer 1982).

Wir wählten für unsere Simulation die Parameter $N=30$, $N_0=10000$, $\Delta\tau=0.2$, $\Delta t=0.5$, $v_0=1$, $K_0=1$. Eine Erhöhung von N und N_0 bzw. eine Verringerung von $\Delta\tau$ und Δt ergab keine wesentlich veränderten Ergebnisse.

b.) Vergleich von Theorie und numerischem Experiment

Ein homogenes und isotropes Gaußsches Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ hat die Einpunkt-Verteilung

$$(49) \quad f_{\vec{v}}(v_1, v_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{v_1^2+v_2^2}{2\sigma^2}} .$$

Deshalb ergibt unsere Theorie (Gleichung (42)) für den mittleren Propagator

$$(50) \quad g(\vec{x}, \vec{x}', t) = \frac{1}{\pi v_0^2 t^2} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{x}')^2}{v_0^2 t^2}} ,$$

wenn $\vec{v}(\vec{x})$ durch (44) gegeben ist (in (49) ist für diesen Fall $\sigma^2 = \frac{v_0^2}{2}$ zu setzen). In unserem numerischen Experiment berechnen wir nicht $g(\vec{x}, \vec{x}', t)$, sondern $g(r, 0, t)$, $r \equiv |\vec{x}-\vec{x}'|$. Diese Größe kann aus (50) leicht berechnet werden, und man findet

$$(51) \quad g(r,0,t) = \begin{cases} \frac{2r}{v_0^2 t^2} e^{-\frac{r^2}{v_0^2 t^2}} , & r \geq 0 \\ 0 , & r < 0 . \end{cases}$$

In Fig. 8 sind (51) und der numerisch berechnete Propagator einander gegenübergestellt; für die freien Parameter wurde in unserer Simulation $v_0 = 1$, $K_0 = 1$ gewählt.

Es ist eine wohlbekannte Tatsache, daß (51) den mittleren Propagator richtig beschreibt, solange das diffundierende Teilchen sich noch in der Nähe seines Anfangsortes aufhält; es hat dann nämlich ein ungefähr konstantes Geschwindigkeitsfeld er-

fahren. In unserem Fall gibt K_0^{-1} die Skala an, auf der $\vec{v}(\vec{x})$ sich deutlich ändert, und v_0 ist ein Maß für die Geschwindigkeit des Teilchens. Gleichung (51) sollte also richtig sein, solange

$$t \ll \frac{1}{K_0 v_0}$$

erfüllt ist, das heißt für $t \ll 1$.

Eine anschauliche Vorstellung von der Änderung unseres Geschwindigkeitsfeldes erhalten wir aus dem Korrelationstensor $\langle \vec{v}(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x}') \rangle$ bzw. einfacher aus dessen Spur $\langle \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}') \rangle$. Es gilt

$$\langle \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}') \rangle = v_0^2 \, J_0(K_0 r) \quad ,$$

wie bereits gezeigt wurde; diese Funktion ist in Fig. 5 dargestellt. Für $K_0 r = 2$ ist $J_0(K_0 r)$ bereits auf ein Fünftel seines Wertes bei $K_0 r = 0$ abgefallen, also sollte ein Teilchen, welches sich entsprechend weit von seinem Anfangsort entfernt hat, ein stark variierendes Geschwindigkeitsfeld "gesehen" haben. Für unsere Wahl der Parameter ($K_0 = 1$, $v_0 = 1$) gilt $K_0 r = 2$ für $r = 2$; diesen Abstand von seinem Anfangsort erreicht ein Teilchen typischerweise nach der Zeit

$$t = \frac{r}{v_0} = 2 \quad .$$

Berücksichtigt man nur unsere heuristischen Argumente, so sollte man also erwarten, daß $g(r,0,2)$ deutlich von der durch (51) gegebenen Funktion abweicht.

Aus Fig. 8 ergibt sich dagegen ein anderer Ablauf des turbulenten Diffusionsprozesses: Bei $t = 2$ stimmen das analytische Ergebnis (51) und der numerisch berechnete Propagator noch sehr gut überein. Erst bei $t = 5$ stellt man deutliche Abweichungen zwischen den beiden Kurven fest; offensichtlich überschätzt die theoretische Lösung die Diffusionsgeschwindigkeit in der turbulenten Strömung, und im Laufe der Zeit macht sich dieser Effekt immer stärker bemerkbar. Für

$$t \sim \frac{1}{v_0 k_0}$$

liefert unsere stochastische Modellströmung (30) also eine korrekte Beschreibung des turbulenten Diffusionsvorgangs; dagegen ist sie für

$$t \gg \frac{1}{v_0 k_0}$$

nicht mehr angemessen. Höhere Momente als der Zweipunkt-Korrelationstensor müssen berücksichtigt werden, um die turbulente Diffusion auch für große Zeiten richtig zu beschreiben.
Die Diskrepanz zwischen theoretischem Modell und numerischer Simulation für große Zeiten findet eine einfache Erklärung, wenn man die Lagrangeschen Korrelationszeiten der beiden Systeme vergleicht: Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ eines Teilchens, welches durch die Modellströmung (30) transportiert wird, ist für alle Zeiten konstant, so daß auch

$$\langle \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t') \rangle = \text{const}$$

gilt für beliebige Werte von t und t'. In diesem Fall ist die Lagrangesche Korrelationszeit also unendlich groß. Norma-

lerweise beobachtet man aber in einer turbulenten Strömung, daß

$$\langle \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t') \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{für } |t-t'| \to \infty$$

erfüllt ist, die Teilchengeschwindigkeit also eine endliche Korrelationszeit hat. Für Zeiten, die groß gegen diese endliche Korrelationszeit sind, sollte unser Modell daher ein unrealistisches Transportverhalten zeigen. Die Ergebnisse der numerischen Simulation bestätigen diese Überlegung.

Zusammenfassend stellen wir fest: Sowohl unsere eigenen als auch die von Kraichnan (1970, Fig. 11) erzielten numerischen Ergebnisse bestätigen, daß die Diffusion passiver Teilchen in einer zeitunabhängigen, inkompressiblen turbulenten Strömung über einen längeren Zeitraum hinweg nur von der Einpunkt-Verteilung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes abhängt. Unser stochastisches Modell liefert eine angemessene Beschreibung für diese Phase des turbulenten Diffusionsprozesses. Für Zeiten, die groß gegen die Lagrangesche Korrelationszeit sind, stimmen die theoretischen Ergebnisse jedoch nicht mehr mit der numerischen Simulation überein; daraus folgt, daß dann höhere Momente als der Zweipunkt-Korrelationstensor berücksichtigt werden müssen, wenn der Diffusionsvorgang ausschließlich durch die Eulerschen statistischen Eigenschften des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes beschrieben werden soll.

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit sind wir von der grundlegenden Hypothese ausgegangen, daß der Transport masseloser Teilchen in einer turbulenten Strömung durch die Ein- und Zweipunkt-Momente des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes beschrieben werden kann. Andere, kompliziertere Annahmen fanden in theoretischen Behandlungen dieses Problems, die über formale Manipulationen hinaus konkrete Ergebnisse liefern sollten, bisher nie einen Platz. Unser Ziel war es, stochastische Modelle zu konstruieren, welche die Ein- und Zweipunkt-Momente realistischer Strömungen reproduzieren können und es gleizeitig gestatten, die mittlere Dichte der transportierten Substanz exakt zu berechnen.
Als Modell für eine eindimensionale, zeitunabhängige Strömung diente uns der Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß. Nach einem Satz von Doob (1942) ist jeder Gaußsche Prozeß, der die Markov-Eigenschaft erfüllt, von diesem Typus; er ist daher für die Untersuchung eindimensionaler Transportvorgänge besonders wichtig. Wir konnten eine exakte Formel für die zeitasymptotische Form der mittleren Teilchendichte angeben und leiteten außerdem eine Näherungslösung her, die sowohl für große als auch für kleine Zeiten in das jeweils exakte Ergebnis übergeht. Die Methoden, welche dazu verwendet wurden, bleiben auch anwendbar, wenn das eindimensionale Geschwindigkeitsfeld durch einen beliebigen Markov-Prozeß mit symmetrischer Übergangswahrscheinlichkeit gegeben ist; diese Bedingung bedeutet anschaulich: Der "gespiegelte" Prozeß, den man durch Multiplikation mit minus Eins erhält, muß die selben statistischen Eigenschaf-

ten haben wie der ursprüngliche. Eine große Klasse von zeitunabhängigen Strömungen mit - bis auf die Symmetriebedingung - beliebigen Ein- und Zweipunkt-Momenten kann also mit Hilfe unserer Ergebnisse analysiert werden.

Für den besonders wichtigen inkompressiblen Fall konnten wir leider nur ein Modell konstruieren, dessen Einpunkt-Momente und Zweipunkt-Korrelationstensor beliebig vorgegeben werden können; seine Zweipunkt-Momente höherer Ordnung sind nicht mehr frei wählbar. Dieser Mangel wird jedoch dadurch ausgeglichen, daß der mittlere Propagator sich auf sehr einfache Weise exakt berechnen läßt; darüber hinaus zeigen numerische Experimente, daß unser Modell trotz seiner Beschränktheit den Transport in einer zeitunabhängigen Strömung gut vorhersagen kann.

Turbulente Geschwindigkeitsfelder, die explizit von der Zeit abhängen, haben wir bei unseren Untersuchungen außer Acht gelassen. Reale Strömungen können zwar von dem "eingefrorenen" Typus sein, den wir hier ausschließlich betrachtet haben (Taylor 1938, Frenkiel und Klebanoff 1966); eine Erweiterung unserer Resultate auf den zeitabhängigen Fall ist aber doch sehr wünschenswert. Wir hoffen, daß unsere Methoden in zukünftigen Arbeiten entsprechend verallgemeinert werden können. Obwohl unsere Ergebnisse also nicht universell anwendbar sind, konnten wir ein grundlegendes Problem bei der Beschreibung turbulenter Transportvorgänge endlich zufriedenstellend lösen: Zum ersten Mal ist es gelungen, den Teilchentransport in <u>ortsabhängigen</u> turbulenten Eulerschen Geschwindigkeitsfeldern <u>exakt und elementar</u> zu berechnen. Der Zweipunkt-Korrelations-

tensor, der sich in der Vergangenheit als wichtigste Größe zur Charakterisierung einer turbulenten Strömung herausgestellt hat, konnte dabei ebenso wie die Einpunkt-Verteilungsfunktion beliebig vorgegeben werden. Die bisher bekannten nicht-heuristischen Theorien konnten dagegen nur komplizierte, praktisch nicht auswertbare Gleichungen für die mittlere Teilchendichte angeben; dabei wurden stets nur Mittelwert und Zweierkorrelation des Geschwindigkeitsfeldes berücksichtigt und sämtliche höheren Momente vernachlässigt. Trotz weniger restriktiver Annahmen sind wir also in dieser Arbeit auf viel einfachere Weise zum Ziel gelangt.

Herrn Prof. Elsässer danke ich für seine Anregungen und Ermutigungen im Verlauf dieser Arbeit und ganz besonders für seine ständige Bereitschaft zur Diskussion.

LITERATURVERZEICHNIS

Arnold, L.: Stochastische Differentialgleichungen. München, Wien: Oldenbourg 1973.

Batchelor, G.K.: Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence. Aust. J. Sci. Res. A2 (1949), Seite 437.

Batchelor, G.K.: Homogeneous Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press 1953.

Bourret, R.: An Hypothesis Concerning Turbulent Diffusion. Canad. J. Phys. 38 (1960), Seite 665.

Darling, D.A.; Siegert, A.J.F.: First Passage Problem for a Continuous Markov Process. Ann. Math. Stat. 24 (1953), Seite 624.

Doob, J.L.: The Brownian Movement and Stochastic Equations. Ann. Math. 43 (1942), Seite 351.

Frenkiel, F.N.; Klebanoff, P.S.: Space-Time Correlations in Turbulence; in: Dynamics of Fluids and Plasmas, hrsg. von S.I. Pai, Seite 257. New York: Academic Press 1966.

Kampé de Fériet, J.: Sur les Equations de la Diffusion Thermique par Turbulence. Ann. Soc. Sci. de Brux. 57 (1937), Seite 67.

Kannan, D.: An Introduction to Stochastic Processes. New York: North Holland 1979.

Kesten, H.; Papanicolaou, G.C.: A Limit Theorem for Turbulent Diffusion. Comm. Math. Phys. 65 (1979), Seite 97.

Kraichnan, R.H.: The Structure of Isotropic Turbulence at very High Reynolds Numbers. J. Fluid Mech. 5 (1959), Seite 497.

Kraichnan, R.H.: Diffusion by a Random Velocity Field. Phys. Fluids 13 (1970), Seite 22.

Levy, P.: Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Paris: Gauthier-Villars 1948.

Lumley, J.L.: The Mathematical Nature of the Problem of Relating Lagrangian and Eulerian Statistical Functions in Turbulence; in: Mécanique de la Turbulence, hrsg. von A. Favré, Seite 17. Paris: Editions du Centre National de la Recherche Scientifique 1962.

Maasjost, W.; Elsässer, K.: Stochastic Particle Acceleration. J. Stat. Phys. 28 (1982) (erscheint im August 1982).

Panchev, S.: Random Functions and Turbulence. Oxford usw.: Pergamon Press 1971.

Papoulis, A.: Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. New York usw.: McGraw-Hill 1965.

Pasquill, F.: Atmospheric Diffusion. New York: Van Nostrand 1962.

Patterson, G.S.; Corrsin, S.: Computer Experiments on Random Walks with Both Eulerian and Lagrangian Satistics; in: Dynamics of Fluids and Plasmas, hrsg. von S.I. Pai. New York: Academic Press 1966.

Phythian, R.; Curtis, W.D.: The Effective Long-Time Diffusivity for a Passive Scalar in a Gaussian Model Fluid Flow. J. Fluid Mech. 89 (1978), Seite 241.

Roberts, P.H.: Analytical Theory of Turbulent Diffusion. J. Fluid Mech. 11 (1961), Seite 257.

Saffman, P.G.: Some Aspects of the Effects of the Molecular Diffusivity in Turbulent Diffusion; in: Mécanique de la Turbulence, hrsg. von A. Favré, Seite 77.

Paris: Editions de la Centre National de la Recherche Scientifique 1962.

Siegert, A.J.F.: On the First Passage Time Probability Problem. Phys. Rev. 81 (1951), Seite 617.

Taylor, G.I.: Diffusion by Continuous Movements. Proc. Lond. Math. Soc. A20 (1921), Seite 196.

Taylor, G.I.: The Spectrum of Turbulence. Proc. Roy. Soc. (London) A164 (1938), Seite 476.

ANHANG A

Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

(i) $$\frac{dw}{d\gamma} = -\gamma w + \xi(\gamma) \quad ; \quad w(0) = w_0 \quad ;$$

$\xi(\gamma) =$ Gaußverteiltes weißes Rauschen

heißt ORNSTEIN-UHLENBECK-Prozeß. Man kann (i) auch schreiben als (Levy 1948)

(ii) $$dw = -\gamma w \, d\gamma + \xi \sqrt{d\gamma} \; .$$

Wir wollen diese Form der Gleichung benutzen, um einige Eigenschaften des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses herzuleiten. Dafür interpretieren wir (ii) als Rekursionsformel für w :

(iii) $$w_{n+1} = w_n + \Delta w_n \quad ;$$
$$\Delta w_n = -\gamma w_n \Delta\gamma + \xi_n \sqrt{\Delta\gamma} \; .$$

ξ_n ist hier eine gaußverteilte Zufallsvariable mit $\langle \xi_n \rangle = 0$, $\langle \xi_n^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle$ für alle n , und ξ_n, ξ_m sind unabhängig für $m \neq n$. Die Aufsummation von (iii) ergibt

(iv) $$w_{n+1} = w_0 (1-\gamma\Delta\gamma)^{n+1} + \sum_{\mu=0}^{n} \xi_\mu \sqrt{\Delta\gamma} (1-\gamma\Delta\gamma)^{n-\mu} \; .$$

w_0 ist ein frei wählbarer, fester Anfangswert.

Man zeigt leicht, daß gilt:

$$\langle w_n \rangle = w_0 (1-\gamma\Delta\gamma)^n \quad ;$$

$$\langle w_n^2 \rangle = w_0^2 (1-\gamma\Delta\gamma)^{2n} + \frac{\langle \xi^2 \rangle}{2\gamma - \gamma^2\Delta\gamma} \left(1-(1-\gamma\Delta\gamma)^{2n}\right) \quad ;$$

(v)

$$\langle w_m w_n \rangle = (1-\gamma\Delta\gamma)^{|m-n|} \langle w^2_{\min(m,n)} \rangle \quad ;$$

$$w_m = (1-\gamma\Delta\gamma)^{m-n} w_n + \sum_{\mu=1}^{m-n} \zeta_\mu \sqrt{\Delta\gamma}\,(1-\gamma\Delta\gamma)^{m-n-\mu} \quad , \quad m>n \; .$$

In der letzten Formel sind die ζ_μ gaußverteilte Zufallsvariable mit $\langle \zeta_\mu \rangle = 0$, $\langle \zeta_\mu^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle$ für alle μ , und ζ_μ , w_n sowie ζ_μ , ζ_ν sind unabhängig für alle $\mu \neq \nu$.
Aus (iv) erhalten wir im Limes $n \to \infty$, $\Delta\gamma \to 0$, $n \cdot \Delta\gamma = \gamma = \text{const.}$ die Lösung von (ii) bzw. (i). Anstelle von (v) gilt dann

$$\langle w(\gamma) \rangle = w_0 e^{-\gamma\gamma} \quad ;$$

$$\langle w(\gamma)^2 \rangle = w_0^2 e^{-2\gamma\gamma} + \frac{\langle \xi^2 \rangle}{2\gamma} \left(1-e^{-2\gamma\gamma}\right) \quad ;$$

(vi)

$$\langle w(\gamma) w(\gamma') \rangle = e^{-\gamma|\gamma-\gamma'|} \langle w(\min(\gamma,\gamma'))^2 \rangle \quad ;$$

$$w(\gamma) = e^{-\gamma(\gamma-\gamma')} w(\gamma') + \zeta_{\gamma'\gamma} \quad , \quad \gamma > \gamma' \; .$$

In der letzten Formel ist $\zeta_{\gamma'\gamma}$ eine Gaußsche Zufallsvariable

mit

$$\langle \zeta_{\gamma'\gamma} \rangle = 0 \quad ;$$

$$\langle \zeta_{\gamma'\gamma}^2 \rangle = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{2\beta} \left(1 - e^{-2\beta(\gamma-\gamma')}\right) .$$

$\zeta_{\gamma'\gamma}$ ist unabhängig von $w(\gamma')$, woraus unmittelbar folgt, daß $w(\gamma)$ ein Markov-Prozeß ist. Er heißt inhomogener Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß.

Nun sei w_0 eine gaußverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert $\langle w_0 \rangle = 0$ und der Varianz $\langle w_0^2 \rangle = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{2\beta}$. Aus $w(\gamma)$ erhalten wir so einen neuen Prozeß $v(\gamma)$. Da $w(\gamma)$ die Gleichungen (vi) erfüllt, gilt für $v(\gamma)$

(vii)

$$\langle v(\gamma) \rangle = 0 \quad ;$$

$$\langle v(\gamma)^2 \rangle = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{2\beta} ;$$

$$\langle v(\gamma) v(\gamma') \rangle = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{2\beta} e^{-\beta|\gamma-\gamma'|} ;$$

$$v(\gamma) = e^{-\beta(\gamma-\gamma')} v(\gamma') + \zeta_{\gamma'\gamma} , \quad \gamma > \gamma' .$$

$v(\gamma)$ ist der homogene Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß.

ANHANG B

Wir geben hier einen ausführlichen Beweis für Satz 6 aus Abschnitt (I.b).

Um Gleichung (17) herzuleiten, müssen wir (13) für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß explizit auswerten. Zunächst setzen wir (14) in (15) ein und erhalten

$$1 - 2\,W\{w(x|w_0) \le 0\} =$$

$$(1) \quad = 1 - 2\int_{-\infty}^{0} dw_y \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2(1-e^{-2\beta x})}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(w_y - w_0 e^{-\beta x})^2}{2\sigma^2(1-e^{-2\beta x})}\right\}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-w_0}{\sqrt{\sigma^2(e^{2\beta x}-1)}}} dw_y'\, e^{-\frac{1}{2}w_y'^2} \;;$$

dabei haben wir

$$w_y' \equiv \frac{w_y - w_0 e^{-\beta x}}{\sqrt{\sigma^2(1-e^{-2\beta x})}}$$

substituiert. Wir setzen (i) zusammen mit (16) in (13) ein; das ergibt ($w_0' \equiv \frac{w_0}{\sigma}$)

$$W\{v(y) > 0 \text{ für alle } y \in [0,x]\} =$$

$$(11) \quad = \int_0^{\infty} dw_0 \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{w_0^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-w_0}{\sqrt{\sigma^2(e^{2\beta x}-1)}}} dw_y'\, e^{-\frac{1}{2}w_y'^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dw_0' \, e^{-\frac{w_0'^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\frac{-w_0'}{\sqrt{e^{2\gamma x}-1}}} dw_y' \, e^{-\frac{1}{2} w_y'^2} \right] .$$

Wir bilden

$$\frac{d}{dx} W\left\{ v(y) > 0 \text{ für alle } y \in [0,x) \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dw_0' \, e^{-\frac{w_0'^2}{2}} \frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\frac{-w_0'}{\sqrt{e^{2\gamma x}-1}}} dw_y' \, e^{-\frac{1}{2} w_y'^2} \right]$$

$$= -\frac{\gamma}{\pi} \frac{e^{2\gamma x}}{(e^{2\gamma x}-1)^{3/2}} \int_0^\infty dw_0' \, e^{-\frac{w_0'^2}{2}} \cdot w_0' \, e^{-\frac{w_0'^2}{2(e^{2\gamma x}-1)}}$$

$$= -\frac{\gamma}{\pi} \frac{e^{2\gamma x}}{(e^{2\gamma x}-1)^{3/2}} \int_0^\infty dw_0' \, w_0' \, e^{-\frac{1}{2} \frac{e^{2\gamma x} w_0'^2}{e^{2\gamma x}-1}}$$

$$= -\frac{\gamma}{\pi} \sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}} \int_0^\infty d\left(\frac{e^{2\gamma x}}{e^{2\gamma x}-1} \frac{w_0'^2}{2} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{e^{2\gamma x} w_0'^2}{e^{2\gamma x}-1}}$$

$$= -\frac{\gamma}{\pi} \sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}} \int_0^\infty dy \, e^{-y}$$

$$= -\frac{\gamma}{\pi} \sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}} .$$

Man verifiziert leicht, daß

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{e^{2\gamma x}-1}\right)=\frac{\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}$$

gilt, und es folgt

$$\text{(iii)}\qquad W\{v(y)>0 \text{ für alle } y\in[0,x)\}= \\ =\text{const}-\frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{e^{2\gamma x}-1}\,.$$

Aus Gleichung (ii) erhält man

$$\lim_{x\to\infty} W\{v(y)>0 \text{ für alle } y\in[0,x)\}=0\,.$$

Damit können wir die Konstante in (iii) berechnen und finden schließlich

$$W\{v(y)>0 \text{ für alle } y\in[0,x)\}= \\ =\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{e^{2\gamma x}-1}\,.$$

ANHANG C

In diesem Anhang leiten wir Gleichung (24) für den genäherten mittleren Propagator $\tilde{g}(x,0,t)$ her.

Aus (21),(22) und (23) erhalten wir

$$\tilde{g}(x,0,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}}^{\infty} dw_0 \, f_w(w_0) \left[1 - 2W\{\tilde{w}(x|w_0) \leq 0\} \right] \; ;$$

aufgrund der Definition von $\tilde{w}$ (vgl. Satz 7) folgt daraus

$$\tilde{g}(x,0,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}}^{\infty} dw_0 \, f_w(w_0) \left[1 - 2 \int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\gamma x}}{\gamma t}} dw_y \, f_{w(x|w_0)}(w_y) \right] ,$$

wobei $f_{w(x|w_0)}$ durch Gleichung (14) und f_w durch (16) gegeben ist. Für den Ausdruck in eckigen Klammern gilt also

$$1 - 2 \int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\gamma x}}{\gamma t}} dw_y \, f_{w(x|w_0)}(w_y) =$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-e^{-2\gamma x})}} \int_{-\infty}^{\frac{1-e^{-\gamma x}}{\gamma t}} dw_y \exp\left\{ -\frac{(w_y - w_0 e^{-\gamma x})^2}{2\sigma^2(1-e^{-2\gamma x})} \right\}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} dw_y' \, e^{-\frac{w_y'^2}{2}} \; ;$$

$$a \equiv \left(\frac{1-e^{-\gamma x}}{\gamma t} - w_0 e^{-\gamma x} \right) \sqrt{\frac{1}{\sigma^2(1-e^{-2\gamma x})}} \; .$$

Damit folgt ($w_0' \equiv \frac{w_0}{\sigma}$)

$$\tilde{g}(x,0,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma t}}^{\infty} dw_0 \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{w_0^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} dw_y' e^{-\frac{w_y'^2}{2}}\right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{A}^{\infty} dw_0' e^{-\frac{w_0'^2}{2}} \left[1 - 2\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}\,(A - w_0')\right)\right].$$

A und Φ sind darin die in Satz 9 definierten Größen. Wir führen die Ableitung aus und erhalten

$$\tilde{g}(x,0,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial A}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}A^2} [1 - 2\Phi(0)] +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{A}^{\infty} dw_0' e^{-\frac{w_0'^2}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}\,(A - w_0')\right)\right].$$

Es gilt $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, also ist der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung Null. Weiter folgt

$$\tilde{g}(x,0,t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{A}^{\infty} dw_0' e^{-\frac{w_0'^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(A - w_0')^2}{e^{2\gamma x}-1}} \left[\frac{\gamma e^{2\gamma x}}{(e^{2\gamma x}-1)^{3/2}} (w_0' - A) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}} \frac{e^{\gamma x}}{\sigma t}\right]$$

$$= \frac{\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}\int_A^\infty dw_o' \, e^{-\frac{w_o'^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(A-w_o')^2}{e^{2\gamma x}-1}} \left[\frac{e^{2\gamma x}}{e^{2\gamma x}-1}(w_o'-A)+A\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}\int_A^\infty dw_o' \, e^{-\frac{w_o'^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(A-w_o')^2}{e^{2\gamma x}-1}} \left[\frac{e^{\gamma x}}{\sigma t} - A\gamma\right]$$

$$= -\frac{\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}\int_A^\infty dw_o' \frac{d}{dw_o'}\left[e^{-\frac{w_o'^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(A-w_o')^2}{e^{2\gamma x}-1}}\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}\frac{1}{\sigma t}\int_A^\infty dw_o' \left[e^{-\frac{w_o'^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(A-w_o')^2}{e^{2\gamma x}-1}}\right]$$

$$= \frac{\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{1}{e^{2\gamma x}-1}}\, e^{-\frac{1}{2}A^2} +$$

$$+\sqrt{\frac{1}{\pi\sigma^2}\frac{e^{-\gamma x}}{t}}\exp\left\{-\frac{1}{2}e^{-2\gamma x}A^2\right\}\Phi\left(-\sqrt{1-e^{-2\gamma x}}\,A\right)$$

durch quadratische Ergänzung der Exponenten im zweiten Integral und Transformation des Integranden auf die "Normalform" $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.-

ANHANG D

Sei $\overleftrightarrow{R}(\vec{x},\vec{x}') \equiv \langle \vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}') \rangle$ der Zweipunkt-Korrelationstensor eines homogenen und isotropen turbulenten Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(\vec{x})$. Für ein zweidimensionales $\vec{v}(\vec{x})$ gilt (Batchelor 1953, Seite 48)

$$\overleftrightarrow{R}(\vec{x},\vec{x}') = \overleftrightarrow{R}(\vec{x}-\vec{x}') = \int \overleftrightarrow{\Phi}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\, d^2K \quad ,$$

$$\overleftrightarrow{\Phi}(\vec{k}) = A(k)\left(\overleftrightarrow{kk} - k^2\overleftrightarrow{I}\right) \quad .$$

Darin ist $A(k)$ eine beliebige Funktion von $k \equiv |\vec{k}|$, $\overleftrightarrow{I}$ der Einheitstensor und $\overleftrightarrow{kk}$ das dyadische Produkt von $\vec{k}$ mit sich selbst. Wir führen Polarkoordinaten für $\vec{k}$ ein und erhalten

$$\overleftrightarrow{R}(\vec{x}-\vec{x}') = -\int A(k)\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \begin{pmatrix} k_y^2 & ; & -k_x k_y \\ -k_x k_y & ; & k_x^2 \end{pmatrix} d^2K$$

$$= -\int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\varphi\, k^3 A(k) \exp\left\{ik\left((x-x')\cos\varphi + (y-y')\sin\varphi\right)\right\} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & ; & -\cos\varphi\sin\varphi \\ -\cos\varphi\sin\varphi & ; & \cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= -\int_0^\infty dk\, k^3 A(k) \left\{ \int_0^{\pi} d\varphi\, \overleftrightarrow{\Omega} + \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi\, \overleftrightarrow{\Omega} \right\} .$$

Dabei haben wir die Abkürzung

$$\overleftrightarrow{\Omega} = \exp\left\{iK\left((x-x')\cos\varphi+(y-y')\sin\varphi\right)\right\}\begin{pmatrix}\sin^2\varphi\,;\,-\cos\varphi\sin\varphi\\ -\cos\varphi\sin\varphi\,;\,\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

verwendet. Im zweiten Integral in der geschweiften Klammer substituieren wir $\varphi' \equiv \varphi - \pi$. Das ergibt

$$\overleftrightarrow{R}(\vec{x}-\vec{x}') = -\int_0^\infty dK\, K^3 A(K)\left\{\int_0^\pi d\varphi\, \overleftrightarrow{\Omega} + \int_0^\pi d\varphi'\, \overleftrightarrow{\Omega}^*\right\};$$

" $*$ " bedeutet komplexe Konjugation. Für diesen Ausdruck können wir auch schreiben

$$\overleftrightarrow{R}(\vec{x}-\vec{x}') = -\int_{-\infty}^{+\infty} dK\,|K|^3 A(|K|)\,x$$

(i)
$$\times\int_0^\pi d\varphi\, \exp\left\{iK\left((x-x')\cos\varphi+(y-y')\sin\varphi\right)\right\}\begin{pmatrix}\sin^2\varphi\,;\,-\cos\varphi\sin\varphi\\ -\cos\varphi\sin\varphi\,;\,\cos^2\varphi\end{pmatrix}.$$

Dies ist die "Normalform" des Zweipunkt-Korrelationstensors $\langle\vec{v}(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}')\rangle$ für den Fall homogener und isotroper Turbulenz.

ERLÄUTERUNGEN ZU DEN FIGUREN

Fig. 1: Der mittlere Propagator $\mathcal{T}g(x,0,\infty)$ für die Gleichungen (7)/(8) ($\gamma=1$).

Fig. 2: Der integrierte mittlere Propagator $\mathcal{T}(x,0,\infty)$ für (7)/(8) ($\gamma=1$).

Fig. 3: Der genäherte mittlere Propagator $\mathcal{T}g(x,0,t)$ (Gleichung (24)) für verschiedene Zeiten ($\gamma=1, \varepsilon=1$). Die gestrichelt gezeichnete Kurve stellt $g(x,0,\infty)$ dar.

Fig. 4: Eine typische Realisierung der zweidimensionalen Modellströmung (30).

Fig. 5: Korrelationsfunktion $\langle\vec{v}(\vec{x})\cdot\vec{v}(\vec{x}')\rangle$ (Gleichung (46)) für das Gaußsche Zufallsfeld (44) ($v_0=1, K_0=1$). Die eingezeichneten Fehlerbalken entsprechen den numerisch berechneten Werten von $\langle\vec{v}(\vec{x})\cdot\vec{v}(\vec{x}')\rangle$ für verschiedene Wahl von $\vec{x}$ und $\vec{x}'$.

Fig. 6: Korrelationsfunktion (47b) für $(x-x')=(y-y')$, $v_0=1$, $K_0=1$.

Fig. 7: Korrelationsfunktion (47a) für $(x-x')=0$, $v_0=1$, $K_0=1$ (bzw. (47c) für $(y-y')=0$).

Fig. 8: Vergleich des theoretisch vorhergesagten mittleren Propagators $g(\tau,0,t)$ mit dem numerisch berechneten für verschiedene Zeiten. Die Kurven geben Gleichung (51) wieder, die Symbole "$\Delta, 0, x, \bullet$" stellen das numerisch berechnete $g(\tau,0,t)$ für $t=0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ dar.

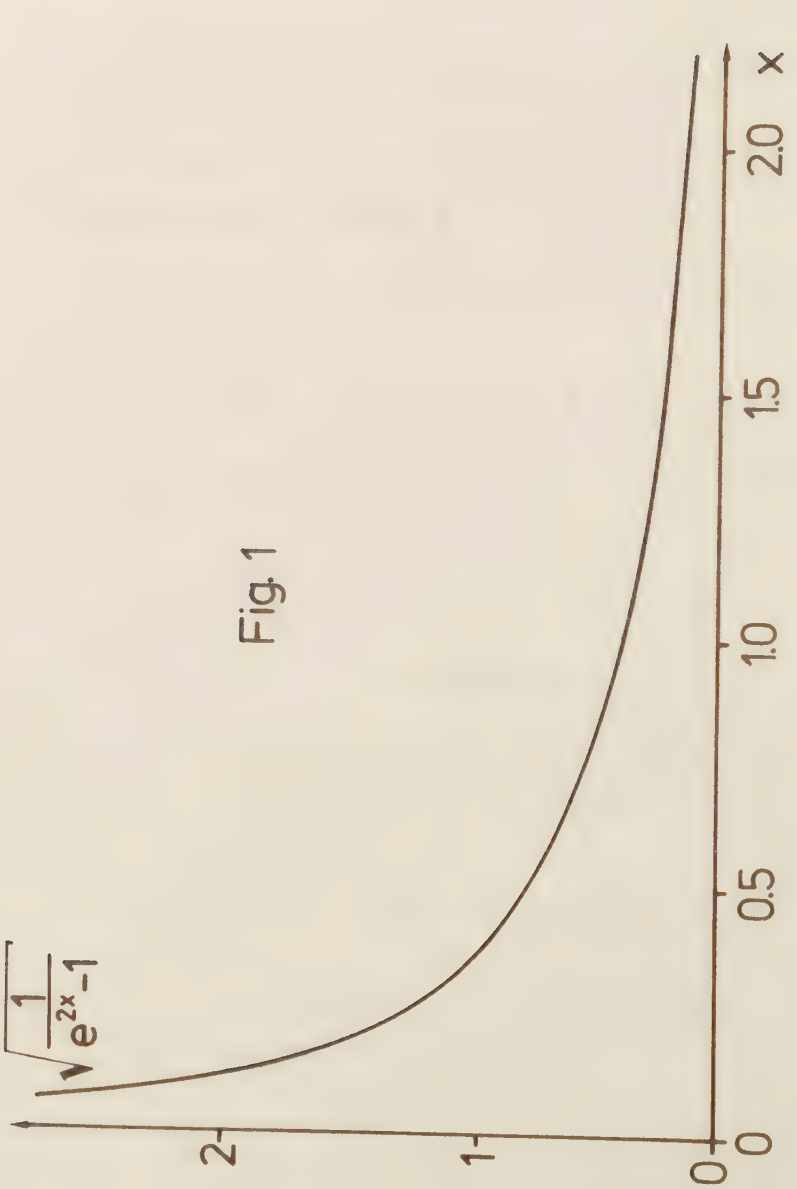


Fig. 1

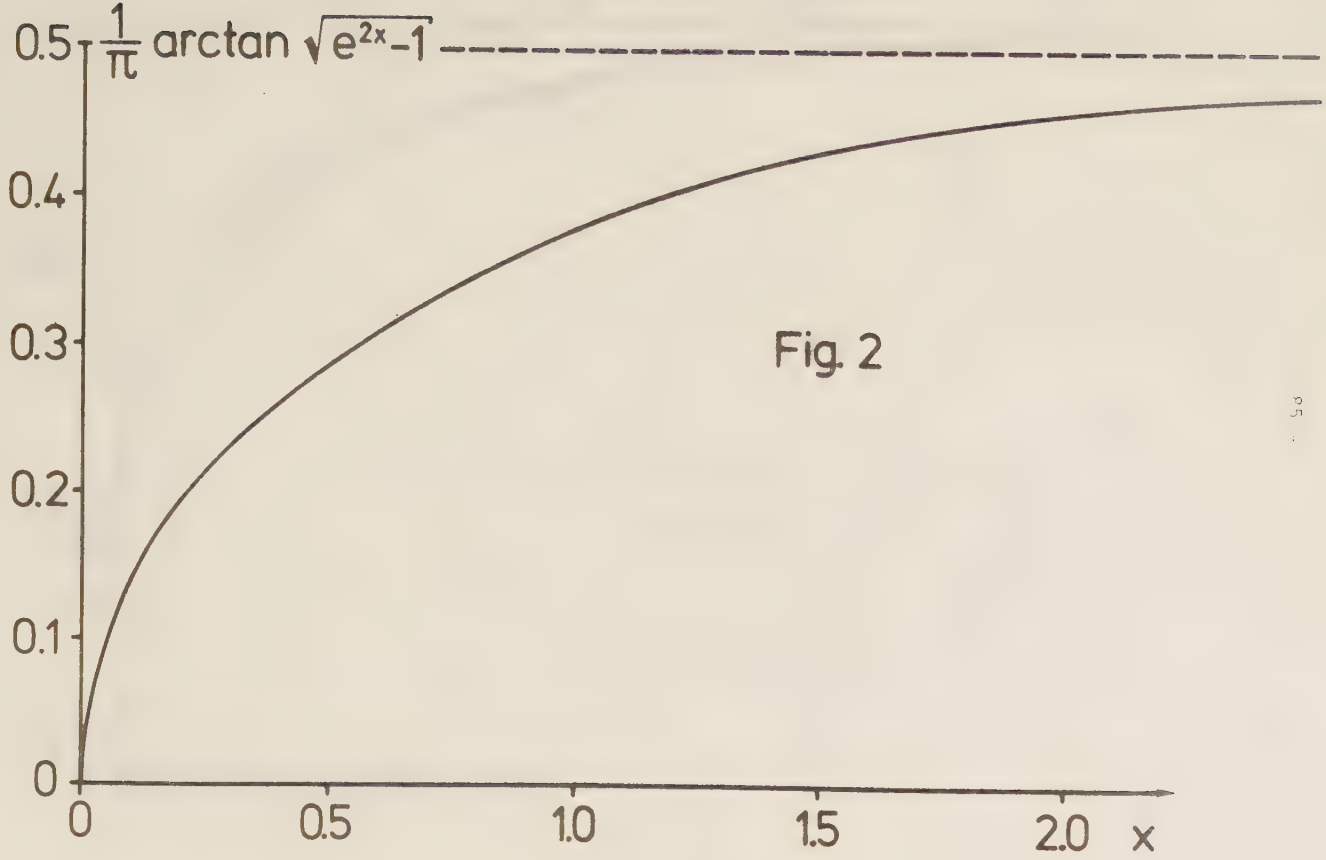


Fig. 2

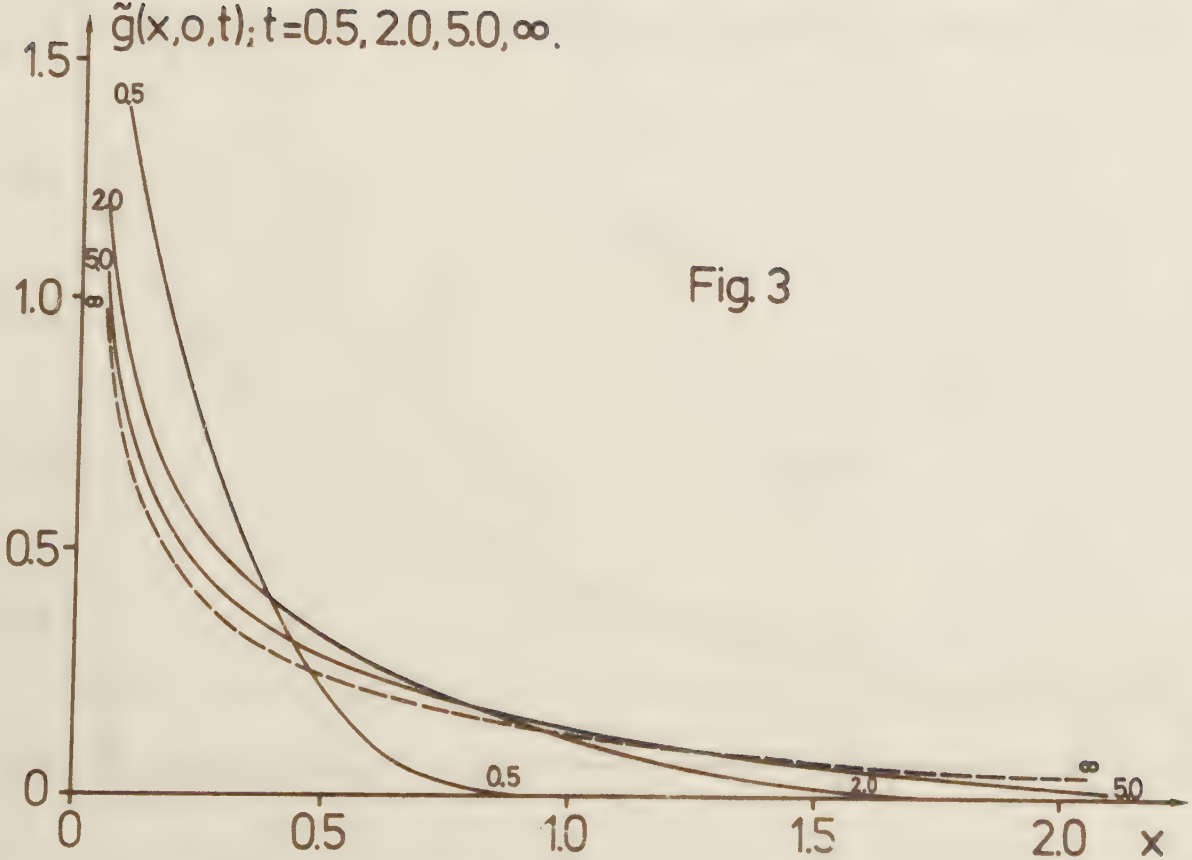


Fig. 3

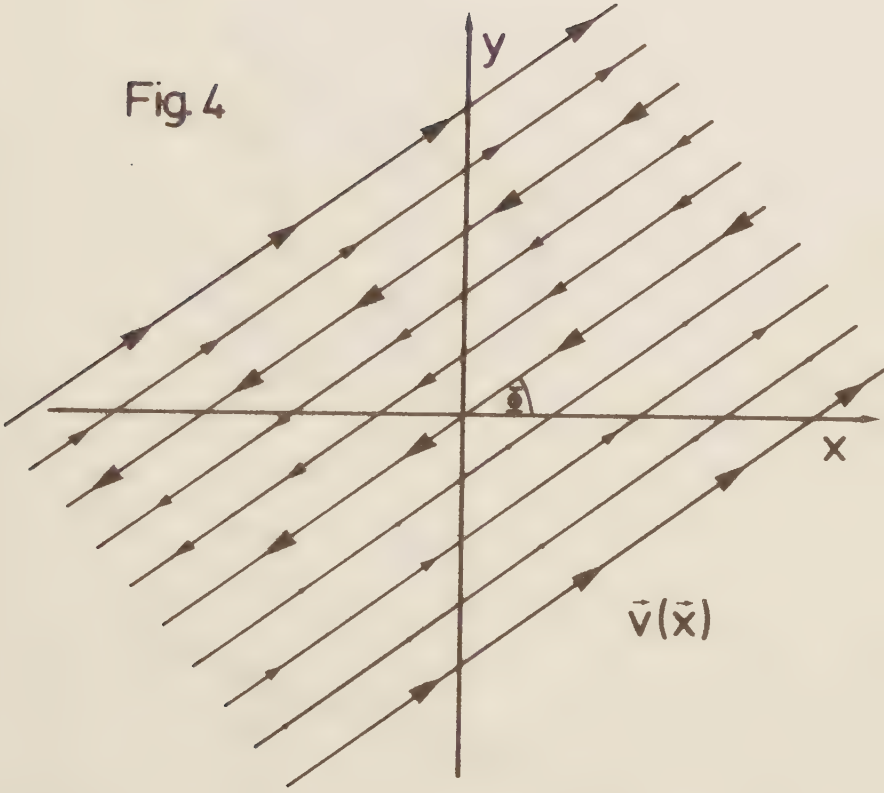


Fig. 4

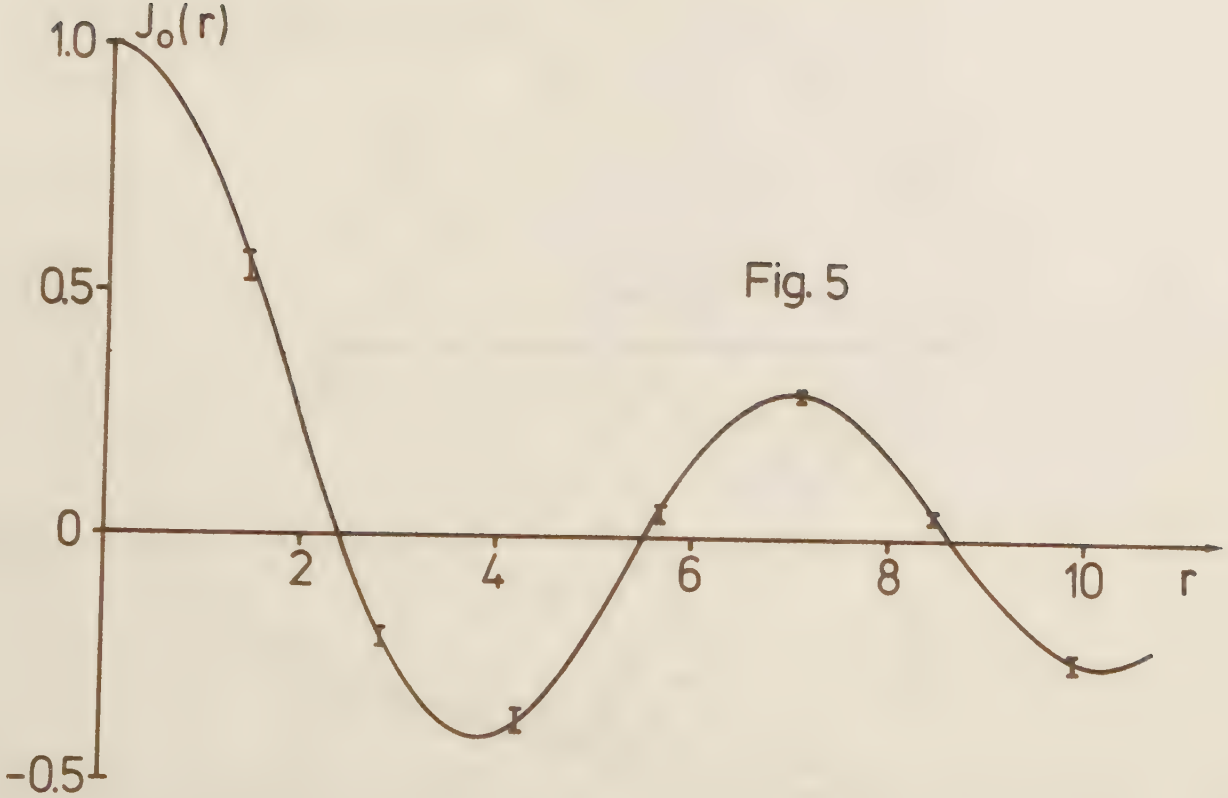


Fig. 5

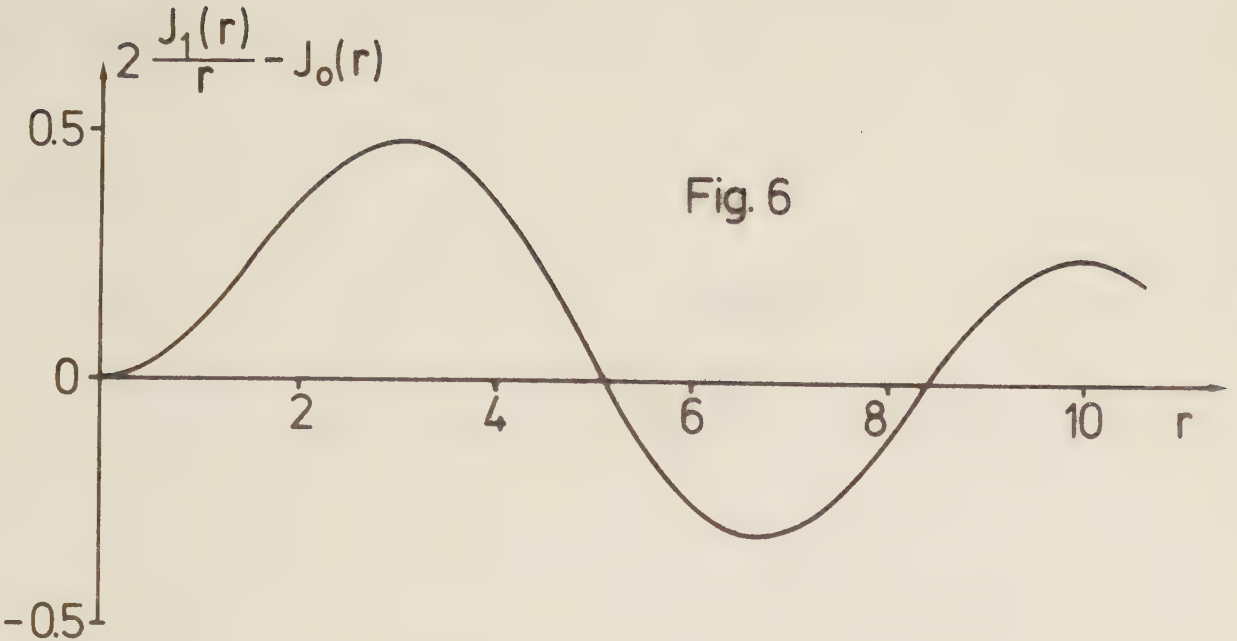


Fig. 6

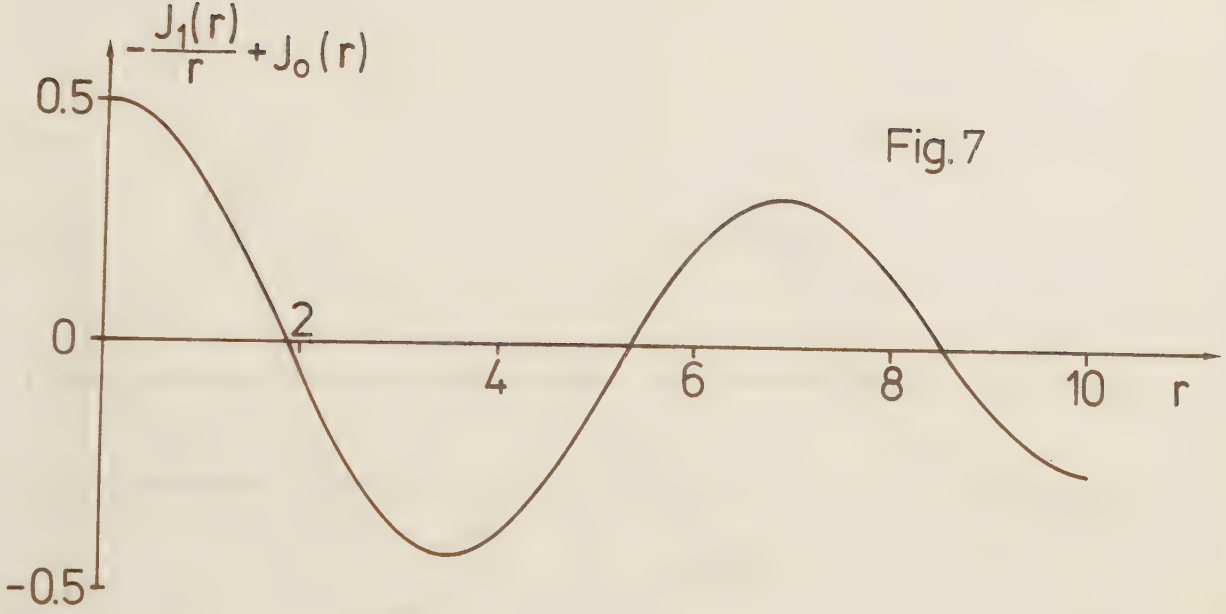


Fig. 7

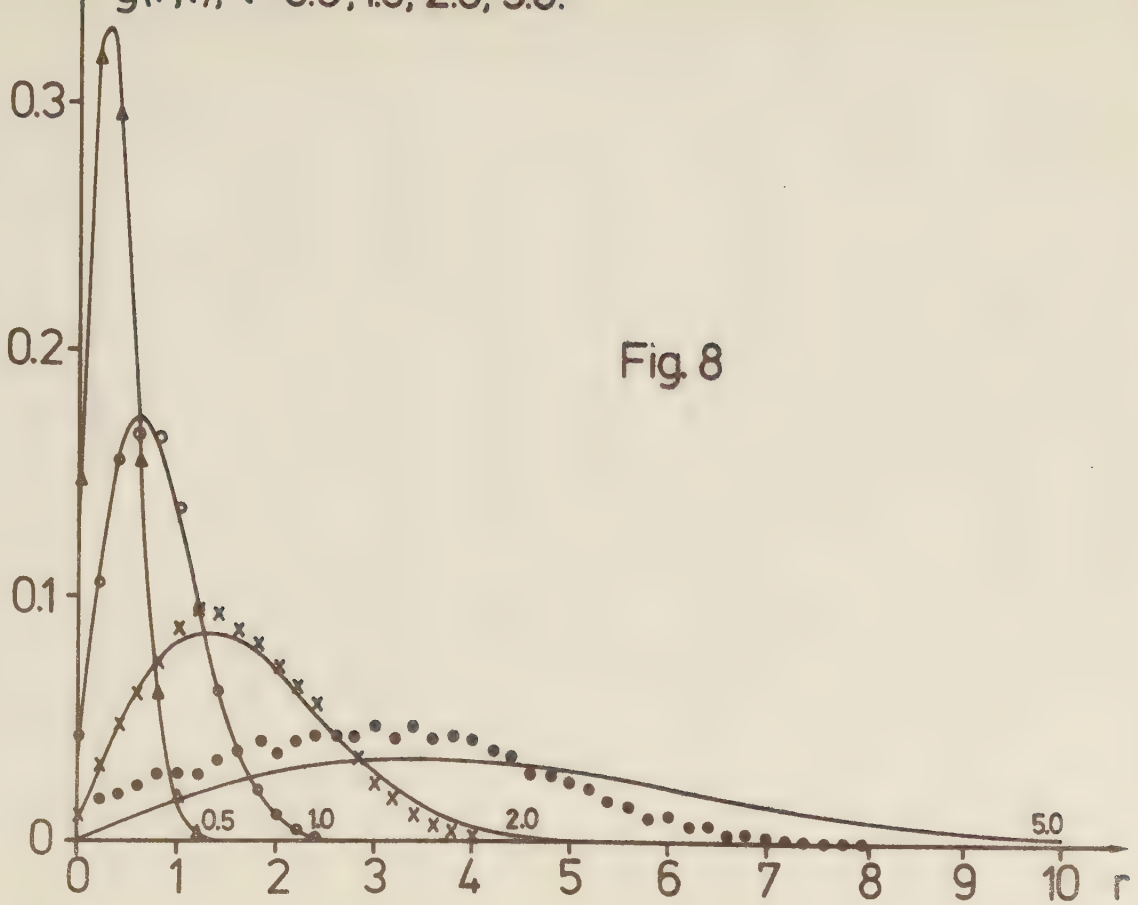


Fig. 8

LEBENSLAUF

1954	am 9. Januar in Verl, Kreis Gütersloh, geboren Vater: Polizeimeister Johann Maasjost Mutter: Maria Maasjost, geb. Sagemüller
1960	Einschulung in die Katholische Volksschule Kaunitz
1964	Eintritt in das Städtische Gymnasium Nepomucenum in Rietberg, Kreis Gütersloh
1972	16. Mai: Reifeprüfung am Gymnasium in Rietberg 1. Oktober: Beginn des Studiums der Physik an der Ruhr-Universität Bochum
1975	2. April: Diplom-Vorprüfung in Mathematik 14. April: Diplom-Vorprüfung in Physik
1977	16. Dezember: Diplomprüfung in Physik 20. Dezember: Wiss. Angestellter im Sonderforschungsbereich "Plasmaphysik Bochum/Jülich"
1978/1979	von September 1978 bis September 1979 Fulbright-Stipendiat an der University of California at Los Angeles
1979	1. Oktober: Wiss. Angestellter im Sonderforschungsbereich "Plasmaphysik Bochum/Jülich"

Bochum, 24. Mai 1982 Winfried Maasjost

D. GRÄBNER
DISSERTATIONS U. OFFSETDRUCKEREI

Gotenstraße 3
8602 Altendorf bei Bamberg
Telefon: 09545/8791